ORDEM
DOS CONTABILISTAS
CERTIFICADOS

FORMAÇÃO SEGMENTADA

SEG3916

Gestão da Eficiência Empresarial

Ana Isabel Martins

Outubro de 2016

Ficha Técnica

Título: Gestão da Eficiência Empresarial

Autores: Ana Isabel Martins

© Ordem dos Contabilistas Certificados, 2016

Não é permitida a utilização deste Manual, para qualquer outro fim que não o indicado, sem autorização prévia e por escrito da Ordem dos Técnicos Oficiais de Contas, entidade que detém os direitos de autor.

ÍNDICE

1. Principais noções de eficiência empresarial ---------- 5
2. Modelos de avaliação da eficiência ---------- 10
2.1 INTRODUÇÃO ---------- 10
2.2 MODELOS PARAMÉTRICOS ---------- 15
2.3 MODELOS NÃO PARAMÉTRICOS ---------- 17
3. Modelo de análise envoltória de dados ---------- 18
3.1 MODELO GERAL ---------- 18
3.2 PRINCIPAIS VARIANTES DO MODELO GERAL: AS ECONOMIAS DE ESCALA ---------- 26
3.3 EXTENSÕES DOS MODELOS ---------- 31
3.4 ORIENTAÇÕES DOS MODELOS ---------- 37
3.5 VARIÁVEIS INPUT/OUTPUT ---------- 39
3.5.1 Seleção das variáveis input/output ---------- 39
3.5.2 Número de variáveis input/output a incluir nos modelos ---------- 42
3.6 EXEMPLOS DE APLICAÇÕES PRÁTICAS ---------- 43
Caso Prático 1. Seleção de variáveis input/output ---------- 46
Caso Prático 2. Modelos Gerais CCR e BCC ---------- 48
Caso Prático 3. Modelo da Superefiência ---------- 56
Caso Prático 4. Modelo Contexto-dependente ---------- 58
Caso Prático 5. Modelo IDEA (invertido) e Composto ---------- 60
Caso Prático 6. Modelo Bietápico ---------- 63
Aplicações práticas avançadas dos modelos DEA ---------- 66
Referências bibliográficas ---------- 78

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1. Metodologias mais comuns para a estimação da eficiência ---------- 11
Tabela 2. Os indicadores de eficiência e o tipo de rendimentos à escala ---------- 29
Tabela 3. Modelos ou resultados específicos obtidos nos softwares DEA ---------- 43

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Representação gráfica da eficiência ---------- 15
Figura 2. Fronteiras de produção para os modelos CCR e BCC ---------- 28
Figura 3. Representação gráfica dos rendimentos à escala ---------- 29
Figura 4. Representação gráfica das classificações atribuídas às DMU ---------- 30
Figura 5. Inviabilidade no Modelo BCC de supereficiência ---------- 33
Figura 6. Fronteira padrão (DEA) e fronteira invertida (IDEA) ---------- 34
Figura 7. Modelo bietápico ---------- 36
Figura 8. NetWork DEA (exemplo de DMU com 3 departamentos) ---------- 37
Figura 9. Método compensatório de normalização única ---------- 41

1. PRINCIPAIS NOÇÕES DE EFICIÊNCIA EMPRESARIAL

> *A expressão sinergia parece possuir uma magia muito especial no domínio dos negócios e são muito poucos aqueles que conseguem não reagir à melodia dos números que a acompanham. É um dos temas que mais apaixona decisores e gestores de empresas ansiosos por criar riqueza e apresentar bons resultados, sendo a sinergia considerada o cálice sagrado da estratégia empresarial.*
>
> (Ferreira, 2002a: 317)

O termo "sinergia" utiliza-se em gestão para designar todos os fenómenos (conjuntos de atividades, negócios ou empresas) que quando geridos ou explorados conjuntamente, conduzem a um acréscimo da sua eficiência e eficácia (por redução de gastos e/ou acréscimo de rendimentos) mais que proporcional à adição pura e simples das suas forças e meios considerados individualmente. Segundo Ferreira (2002a), o conceito de sinergia tem por base os trabalhos de Igor Ansoff[1] que classifica os diversos tipos de sinergia de acordo com o tipo de retorno obtido, nomeadamente:

- Sinergias pelos Rendimentos que são obtidas por via da utilização comum de canais de distribuição e rede de vendas, serviços de administração, armazenamento, campanhas de publicidade, marcas, etc. e que podem promover um acréscimo dos rendimentos (vendas) para os mesmos capitais investidos;
- Sinergias Operacionais que são obtidas por via da utilização comum de capital humano ou da diluição dos gastos fixos por um maior volume de produção;
- Sinergias de Investimento que são obtidas por via da utilização comum de instalações, equipamentos, ferramentas, transferência de conhecimento e tecnologias;
- Sinergias de Gestão que são obtidas por via da utilização comum das competências e *know-how* dos órgãos de gestão e decisão.

Existem diversas outras classificações de sinergias como, por exemplo, com base nos recursos e outros ativos, podendo identificar-se sinergias de crescimento (ganhos por via da dimensão), de poder de mercado, de domínio, de coligação ou conluio (associada a acordos sobre preços de mercado), financeiras (conduzem a reduções no custo do capital, obtenção de benefícios fiscais ou acréscimo da capacidade de endividamento), entre outras (Ferreira, 2002a; 2002b).

---

[1] Ansoff, H. Igor (1965) *Corporate Strategy*, New York, McGraw-Hill. Obra revista e editada em 1987, Penguin Books.

Contudo, nem sempre é fácil a classificação do tipo de sinergia envolvido dado que, por vezes, coexistem diversos tipos em simultâneo. Por exemplo: nas chamadas sinergias pelos rendimentos ou pelos lucros que advêm do aumento do poder de mercado por via do crescimento e da diversificação. Considera-se que uma empresa aumenta o seu poder de mercado sempre que, por via de uma operação de Fusão e Aquisição (F&A) por exemplo, aumenta a sua capacidade de influenciar os preços, as quantidades ou mesmo a natureza dos produtos ou serviços. Associado ao aumento do poder de negociação, o aumento do poder de mercado implica, geralmente, o aumento dos preços de venda e consequentemente o aumento dos lucros (Gugler *et al.*, 2003).

As sinergias pelos gastos e pelos rendimentos são tipicamente analisadas como mutuamente exclusivas. Contudo, Ferreira (2002a) apresenta uma análise integrada, através da exploração de efeitos cruzados, segundo uma abordagem que combina as sinergias pelos gastos e pelos proveitos, dado que:

> *A reconfiguração e a racionalização de recursos permitem (1) vender ativos excedentários ou dispensáveis ou não suficientemente rendáveis, reduzindo custos e conduzindo a poupanças, (2) utilizar de forma otimizada os recursos das empresas combinadas – técnicos, financeiros e outros, quer haja ou não haja transferência desses recursos, (3) alterar as combinações (mix) dos produtos e serviços e a melhorar os sistemas técnicos e organizacionais. Da venda dos ativos podem resultar mais-valias e libertação de meios líquidos que poderão ser utilizados noutras áreas, tais como, pesquisa e desenvolvimento, operações, logística, redes de vendas ou de comunicação e serviços gerais.*
>
> (Ferreira, 2002a: 152-153)

Consideram-se "ganhos de eficiência" ou "economias" todas as reduções, voluntárias ou involuntárias, do custo médio de produção registadas por uma unidade económica, que podem ser provocadas por múltiplas causas, entre as quais se podem distinguir o aumento do volume de produção e o progresso tecnológico. Os ganhos de eficiência na produção baseiam-se nas sinergias baseadas nos gastos e assentam em acréscimos de economias de escala e gama (*scope*).

As economias de escala ocorrem quando a expansão da capacidade de produção de uma empresa ou indústria provoca um aumento na quantidade total produzida sem um aumento proporcional no custo de produção. Como resultado, o custo médio do produto tende a ser menor com o aumento da produção, uma vez que os gastos fixos ou de estrutura são repartidos por um maior volume de produção. As economias de escala podem ocorrer em áreas operacionais, tais como: pesquisa, aprovisionamento, produção, distribuição e *marketing* ou em áreas gerais, de administração, financeira, pessoal, entre outras.

Stanlake (1993) classifica as economias de escala em internas e externas. São internas aquelas que resultam do aumento da escala de produção por crescimento da própria empresa e externas as obtidas por via do crescimento do setor de atividade ou a outros fatores externos, tais como as inovações tecnológicas. As economias de escala externas são geralmente obtidas por diversas (ou mesmo todas) as empresas de um determinado setor, independentemente das variações das escalas de produção individuais. Um caso particular das economias de escala externas são as denominadas economias de concentração, que correspondem às vantagens que uma empresa pode obter, em termos de gastos, resultantes do facto de uma série de empresas do mesmo setor se situarem em áreas geográficas próximas.

Consideram-se economias de gama ou de modelo (*scope*) as reduções obtidas nos gastos totais por via da produção de múltiplos produtos ou produtos complementares. As economias de gama assentam nos princípios subjacentes à diversificação, podem promover vantagens competitivas e estratégicas e verificam-se principalmente em empresas com excesso de capacidade de produção.

Uma empresa é considerada eficiente quando atinge a dimensão ótima no seu mercado (via economias de escala) e quando produz o conjunto ótimo de produtos e serviços face ao custo dos seus fatores produtivos (via economias de gama). Os fatores "dimensão ótima" e "portfólio ótimo de produtos" dependem largamente da tecnologia, regulamentação e tendências dos consumidores. Desta forma, a procura por economias de escala e de gama promove a existência de uma multiplicidade de estruturas empresariais viáveis, que diferem ao longo do tempo, nos diversos setores de atividade e nos diversos países.

Stanlake (1993) argumenta que para cada setor de atividade existe uma dimensão ótima da empresa, em que o custo médio atinge um ponto mínimo. A dimensão ótima da empresa é variável de acordo com as alterações das técnicas de produção promovidas pelo progresso tecnológico e quando é ultrapassada promove geralmente um aumento dos custos médios e o decréscimo da eficiência. Contudo, parece não existir razões meramente técnicas para justificar este fenómeno (denominado deseconomias de escala), uma vez que o aumento da especialização, a maior dimensão dos equipamentos, o princípio dos múltiplos (derivado das diferentes capacidades de produção de cada equipamento) ou as indivisibilidades (limites mínimos de produção de certos equipamentos) permitem geralmente reduções sucessivas do custo médio à medida que a escala de produção aumenta. O autor defende que estas são normalmente geradas por dificuldades a nível da gestão. Gerir grandes empresas é mais complexo pois é mais difícil desempenhar funções de coordenação, de controlo, de comunicação e de manutenção da motivação entre os trabalhadores.

A *performance* das unidades produtivas é frequentemente avaliada através de indicadores de eficiência produtiva. O conceito geral de eficiência está relacionado com a forma como os recursos são utilizados no processo produtivo e pode ser decomposto em dois componentes: a eficiência técnica e a de afetação ou alocativa.

A eficiência técnica (*technical efficiency*) está relacionada com a avaliação das combinações observadas de *inputs*/*outputs* comparativamente às melhores alternativas tecnológicas possíveis. A eficiência técnica reflete essencialmente a eficiência do processo de produção em converter *inputs* em *outputs* (Avkiran, 1999). Diz-se que uma empresa tem eficiência técnica se, a partir de um dado conjunto de *inputs* e da tecnologia existente, ela consegue produzir o máximo de *output* possível (ou se para um determinado nível de *output* e com base na tecnologia disponível, ela consegue produzi-lo com o mínimo possível de *inputs*).

A avaliação da eficiência de afetação exige informação adicional sobre os objetivos económicos da unidade produtiva e dos preços de mercado com que esta se depara. Neste contexto, a maioria dos estudos centram-se sobre a minimização dos gastos, estando a eficiência de afetação associada à otimização das combinações de *inputs* que permita minimizar os custos de produção, face aos preços dos mesmos (Avkiran, 1999). Ou seja, diz-se que uma empresa tem eficiência de afetação se utilizar os seus *inputs* de acordo com a estrutura ótima que minimize o custo de produção.

Note-se ainda que uma empresa apenas tem eficiência de escala (mesmo que tenha eficiência técnica e de afetação) se produzir a quantidade de *output* que lhe permita maximizar o lucro, ou seja, se estiver a trabalhar na escala ótima de produção.

Uma unidade produtiva é (globalmente) eficiente quando produz um determinado vetor de *output*s, por via da combinação de *inputs* que permita minimizar os custos de produção, dados os preços dos recursos (*inputs*) e a tecnologia utilizada. Este tipo de eficiência tem sido denominado, nos diversos estudos empíricos, por eficiência-x (*X-efficiency*) e a sua avaliação é efetuada com base na aplicação de fronteiras de eficiência (Canhoto, 1996). Uma empresa será tanto mais x-eficiente quanto mais próxima estiver da fronteira de eficiência (Clark e Siems, 2002).

Berger *et al*. (1993) alertam para a necessidade de distinguir entre os estudos que avaliam a eficiência-x (com a respetiva decomposição em eficiência técnica e de afetação) e os estudos que avaliam a estrutura de gastos das unidades produtivas por via das eficiências de escala e de gama, assumindo, implicitamente, um nível de eficiência equivalente entre as unidades produtivas. Os primeiros incorporam o facto de existirem diferenças entre as capacidades dos gestores para controlar os custos de produção.

> *(…) a eficácia está ligada à quantidade produzida, a produtividade à razão entre produtos e recursos e (…) a eficiência tem relação com certas comparações de produtividade. Eficiência é um conceito relativo. Compara o que foi produzido, dados os recursos disponíveis, com o que poderia ter sido produzido com os mesmos recursos.*
>
> Mello *et al.* (2005: 2521-2522)

Note-se que a eficiência e a produtividade têm uma relação direta entre si, porém são coisas distintas: a eficiência da produção é o quanto se produz em relação ao quanto se poderia produzir (geralmente é expressa em percentagem e é o nível de produção atingido em relação aos recursos e o seu gasto); a produtividade é o quanto se produz em relação aos recursos utilizados (geralmente é expressa em quilos por hora, unidades por funcionário por dia, litros por máquina, calorias por quilo, páginas por minuto, etc.).

Noutra perspetiva: podemos encarar a diferença entre entes dois importantes fatores quase como a diferença entre a qualidade (eficiência) e a quantidade (produtividade).

Ou ainda numa perspetiva mais matemática:

- **Eficiência** é a relação entre os recursos que deveriam ser consumidos e os recursos realmente consumidos;
- **Produtividade** é a relação entre os resultados obtidos e os recursos consumidos;
- **Eficácia** é a relação entre os resultados obtidos e os resultados desejados ou previstos.

2. MODELOS DE AVALIAÇÃO DA EFICIÊNCIA

2.1 INTRODUÇÃO

O termo geral "eficiência" constitui um conceito lato, dado que pode ser aplicado a uma multiplicidade de fatores dentro de uma empresa. As especificações dos diversos tipos de eficiência exigem diversas metodologias de avaliação para as mesmas.

O método mais simples consiste em comparar indicadores económico-financeiros que caracterizem a estrutura de gastos e a rendibilidade. Contudo, este método não incorpora completamente o efeito dos preços exógenos dos *inputs* e *outputs* produtivos, que podem divergir entre empresas derivado da existência de diferentes poderes de mercado ou localizações geográficas, por exemplo.

As análises mais complexas envolvem o estudo comparativo entre os indicadores de uma empresa com os melhores resultados obtidos no setor, determinados através de métodos estatísticos, tomando em consideração os *inputs*, os *outputs* e os preços de cada empresa.

As metodologias baseadas nas fronteiras permitem a obtenção de um indicador global de eficiência, através da estimação de uma fronteira de eficiência e do cálculo dos desvios de cada empresa ou unidade em relação a essa fronteira. Um dos métodos muito utilizados consiste na estimação de uma fronteira estocástica (uma combinação dos fatores supra referidos) ao longo da qual qualquer empresa considerada eficiente poderia supostamente operar. Operar sobre a linha da fronteira significa operar com a combinação ótima dos recursos existentes. A avaliação da distância entre a posição atual de cada empresa em relação à fronteira estocástica constitui o seu indicador de (in)eficiência.

Outro método muito utilizado consiste na estimação de fronteiras de gastos ou de rendimentos de forma não paramétrica, assumindo que não há erros aleatórios na amostra, atribuindo todos os resíduos provenientes do processo de estimação à ineficiência.

A avaliação das economias de escala e de gama é normalmente efetuada através da análise da forma da fronteira. Se a *performance* das empresas que operam sobre a fronteira puder ser melhorada através de uma alteração da sua dimensão ou do seu portfólio de produtos, então ainda há potencial para obter economias de escala e de gama, respetivamente.

Para as empresas cotadas em bolsa, a eficiência também é usualmente avaliada com base nas variações das cotações. Uma empresa é considerada como um bom investimento quando o valor das suas ações se situa acima de um determinado

valor de referência (média do setor ou de um conjunto de empresas com características semelhantes). Por exemplo, a avaliação da eficiência ganha por via de uma operação de F&A é efetuada pela soma das cotações das empresas envolvidas: se o resultado da soma pós F&A for superior aos valores pré F&A, então considera-se que a operação criou valor para o acionista e que destruiu valor se for menor.

Nas últimas décadas foram desenvolvidas múltiplas metodologias de estimação da eficiência, podendo ser classificadas em dois grandes grupos: paramétricas e não-paramétricas. Apresenta-se na tabela 1 os modelos mais comuns.

Tabela 1. Metodologias mais comuns para a estimação da eficiência

	Paramétrico	Não-paramétrico
Fronteira	Fronteiras Estocásticas	Análise Envoltória de Dados
Não-fronteira	Regressão	Indicadores de Desempenho

Fonte: Elaborado pela autora

Relativamente aos modelos não-fronteira, a aplicação de modelos de regressão, por si só, é bastante limitada, dado que apenas permite uma medida de eficiência, não identificando as unidades com melhores práticas. É estabelecida a eficiência "média", sendo possível identificar as unidades que se apresentam acima ou abaixo dessa referência (Butler e Johnson, 1997).

A aplicação de indicadores de desempenho consiste na utilização de um conjunto de indicadores ou rácios que avaliam determinados aspetos das empresas ou unidades avaliadas. Os indicadores são calculados com base nas relações entre as variáveis de *output/input*, tornando-se bastante complexa a análise de resultados na presença de múltiplas variáveis, devido à necessidade de se calcularem numerosos indicadores (por vezes conflituosos entre si). Nestes casos é muito difícil, ou mesmo impossível, a clara distinção entre unidades eficientes e ineficientes, exceto se alguma unidade apresentar uma *performance* superior em todos os indicadores estudados (Butler e Johnson, 1997).

Relativamente aos modelos de fronteira, Berger e Humphrey (1997) reveem 130 estudos empíricos sobre eficiência em 21 países e identificam as abordagens mais utilizadas nos mesmos, segundo dois grandes grupos de metodologias:

Paramétricas: *Stochastic Frontier Approach* – SFA, *Distribution Free Approach* – DFA, *Thick Frontier Approach* – TFA;

Não-paramétricas: *Data Envelopment Analysis* – DEA, *Free Disposal Hull* – FDH.

Os autores verificam que a metodologia DEA é a mais popular, aplicada em cerca de 48% dos estudos empíricos estudados e que as diferentes metodologias não produzem resultados consistentes.

Também Berger *et al*. (1993) já haviam analisado os resultados de vários estudos, realizados por outros investigadores, em que foram aplicados os métodos SFA, TFA, DEA e DFA e verificaram que não existe uma regra que defina qual o método mais apropriado. Além disso, alertam para o facto de que a escolha do método e das respetivas variáveis a utilizar influencia, de forma significativa, os resultados obtidos em termos de níveis de eficiência. Contrariamente a estas posições, Resti (1997) defende que as diferenças encontradas entre os resultados obtidos de modelos paramétricos (SFA) e não paramétricos (DEA) não são significativas e podem ser explicadas pelas características intrínsecas dos próprios modelos.

Independentemente do modelo aplicado, para analisar e avaliar a eficiência é necessário o estudo da função produção, ou seja, como combinar os recursos (*inputs*) de forma a produzir resultados (*outputs*).

Uma função produção expressa a relação não-monetária[2] entre as entradas (*inputs*) e as saídas (*outputs*) de um processo produtivo ou empresa, descrevendo, de forma gráfica ou matemática, os *outputs* esperados pela combinação de diferentes quantidades de *inputs*. Deste modo, através de uma função produção é possível determinar a maior quantidade possível de *output* que pode ser produzida numa unidade de tempo, com todas as combinações de *inputs* considerando características específicas do processo produtivo ou determinar as necessidades mínimas de *inputs* necessárias para produzir determinadas quantidades de *output* dada a tecnologia disponível.

Na sua forma matemática e em termos gerais, uma função produção é expressa como:

$$Q = f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

Com,

Q : quantidade de *output*

x_1, x_2, x_3,… : unidades de *input* (capital, mão-de-obra, matérias-primas, espaço, tecnologia,…)

A função produção pode ser expressa segundo uma função aditiva:

[2] A função produção relaciona *inputs*/*outputs* físicos, não considerando preços ou gastos.

$$Q = a + bx_1 + cx_2 + dx_3$$

Com: *a*, *b*, *c*, e *d* parâmetros determinados empiricamente

Ou segundo uma função multiplicativa ou de Cobb-Douglas:

$$Q = ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$$

Com,

Q : quantidade de *output*

a : constante que representa o nível tecnológico

α e β : parâmetros de escala

x_1 : unidade de *input* (mão-de-obra)

x_2 : unidade de *input* (capital)

Nesta última, *Q* corresponde à quantidade máxima de *output* possível de obter para determinados níveis de *inputs*: mão-de-obra (x_1) e capital (x_2). Mesmo que todas as empresas produzissem o mesmo produto, com base na mesma tecnologia, elas poderiam utilizar diferentes combinações de mão-de-obra e capital para produzir diferentes níveis de produção. Todas as empresas que operem com combinações *input*/*output* sobre a linha de fronteira definida pela expressão dizem-se tecnologicamente eficientes (e as que operam com combinações *input*/*output* acima da linha de fronteira dizem-se ineficientes).

Considere-se uma função custo, representativa de uma solução para um problema de minimização dos custos de produção. A função delimita uma fronteira, dado que não é possível a nenhuma empresa situar-se abaixo do mínimo. Contudo, más decisões de gestão, imperfeições dos mercados ou condicionantes regulamentares podem contribuir para que a empresa suporte gastos superiores ao mínimo. A diferença entre os gastos efetivamente suportados pela empresa e o custo dado pela fronteira (eficiente) pode ser interpretado como um indicador de ineficiência (Mendes, 1994).

As constantes *a* e β expressam a importância da mão-de-obra e do capital no processo de produção, sendo a sua soma indicativa dos rendimentos de escala obtidos pela empresa. A constante *a* depende das unidades que são utilizadas para medir os *inputs* e os *outputs*.

As principais premissas associadas à função produção são as seguintes:

- É necessária a utilização de ambos os *inputs*, ou seja, capital e mão-de-obra, para se obter uma produção positiva;
- A produção total poderá ser aumentada com o aumento dos dois *inputs* ou mantendo um constante e aumentando o outro;
- É possível obter o mesmo nível de produção com diferentes combinações de *inputs*.

Contudo, a função produção está sujeita à denominada lei dos rendimentos decrescentes: mantendo constante um *input*, a produção marginal tende a diminuir com aumentos sucessivos do outro *input*. Os retornos decrescentes da produção marginal verificam-se, do posto de vista funcional, se o expoente do *input* for menor que a unidade.

Com um aumento simultâneo dos dois *inputs*, a produção total poderá registar os seguintes cenários:

- Um aumento proporcional do nível da produção, verificando-se retornos constantes à escala;
- Um menor aumento percentual da produção, verificando-se retornos decrescentes à escala;
- Um maior aumento percentual da produção, verificando-se retornos crescentes à escala.

Os rendimentos de escala são avaliados na função Cobb-Douglas com base na soma dos parâmetros *α* e *β*, nomeadamente:

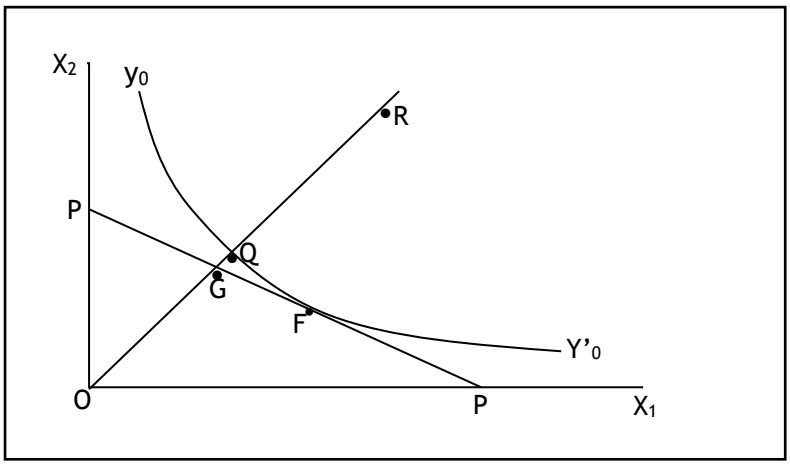
- $\alpha + \beta = 1$: rendimentos constantes à escala;
- $\alpha + \beta < 1$: rendimentos decrescentes à escala;
- $\alpha + \beta > 1$: rendimentos crescentes à escala.

É importante verificar e analisar a ocorrência de diversos tipos de rendimentos à escala na mesma função de produção. Veja-se o seguinte exemplo: se $\alpha = 0,8$ e $\beta = 0,9$ registam-se retornos decrescentes para os *inputs* utilizados na função de Cobb-Douglas, dado que expoentes menores que a unidade refletem retornos marginais decrescentes de cada *input* utilizado. Contudo, $\alpha + \beta = 1,6$ o que representa rendimentos crescentes à escala para a função produção.

Farrell (1957) foi pioneiro ao apresentar a primeira abordagem à eficiência relativa, através da criação de um método que permitia medir a eficiência baseada na distância da unidade sob avaliação a uma fronteira de produção, sendo esta determinada com base no desempenho de um conjunto de unidades com elevada *performance*.

Segundo o modelo de Farrell (1957), expresso segundo uma função de produção com dois *inputs* $y = f(x_1, x_2)$ e baseada numa tecnologia que permite rendimentos constantes à escala, toda a área (à direita) delimitada pelo vetor y_0 y'_0 da figura 1 representam combinações possíveis de x_1 e x_2 que permitem obter, no mínimo, o nível de produção y_0.

Figura 1. Representação gráfica da eficiência



Fonte: Mendes (1994: 4)

A produção ao mínimo custo regista-se no ponto *F*, dados os preços dos *inputs* (representado pelo vetor *PP*). Uma empresa que opere em *R* não é uma empresa eficiente.

Segundo Farrell (1957) o indicador de eficiência produtiva global (EPG) é dado pelo rácio: EPG = OG/OR, que pode ser decomposto nos indicadores de eficiência técnica (ET = OQ/OR) e eficiência preço ou de afetação (EP = OG/OQ), dado que, EPG = ET $\times$ EP.

$$EPG = ET \times EP = \frac{OQ}{OR} \times \frac{OG}{OQ} = \frac{OG}{OR}$$

Aplicado a uma função custo, o indicador complementar a EPG, ou seja, (1 – EPG), representa a potencial diminuição de gastos resultantes da eliminação das ineficiências.

2.2 MODELOS PARAMÉTRICOS

A abordagem paramétrica tem como principal característica a imposição de uma forma funcional à tecnologia para explicar os níveis de eficiência das empresas.

Esta abordagem envolve dois tipos de modelos: os modelos com fronteiras determinísticas e os modelos com fronteiras estocásticas, cuja principal diferença básica reside na suposição em relação ao termo de erro:

- O modelo com fronteiras determinísticas supõe que toda ineficiência provém de fenómenos controlados pelas empresas, possuindo o termo de erro uma distribuição unilateral não simétrica;
- O modelo de fronteira estocástica supõe a existência de um erro de tipo composto, constituído por dois tipos de erros: um erro unilateral, com as mesmas características pertencentes às fronteiras determinísticas e um erro simétrico, com variação aleatória e distribuição normal com média igual a zero, que captura os efeitos dos fenómenos não controlados pela empresa.

Os modelos de fronteiras paramétricas utilizaram, na sua fase inicial, formas funcionais neoclássicas como as funções Leontief e Cobb-Douglas. Contudo, os bons resultados obtidos com a aplicação de formas funcionais flexíveis promoveram, a partir da década de 1980, o desenvolvimento de estudos com base na função translog. Contudo, o processo de estimação baseado em formas funcionais tais como a função Cobb-Douglas ou a função translog, não permite uma diferenciação direta entre as ineficiências decorrentes da escala e a ineficiência-x (Ribeiro, 2006).

Como referido anteriormente as metodologias mais comuns de entre os modelos paramétricos são as seguintes:

- *Stochastic Frontier Approach* (SFA): a metodologia SFA especifica uma forma funcional para gastos, lucros ou relação de produção entre *inputs*, *outputs* e fatores ambientais, permitindo erro aleatório (usualmente com distribuição simétrica normal) e assumindo que as ineficiências seguem distribuição assimétrica (geralmente semi-normal). Pode ser aplicada a dados *cross section*[3] ou a dados em painel[4].
- *Distribution Free Approach* (DFA): a metodologia DFA também especifica uma forma funcional para a fronteira eficiente e separa ineficiências de erros aleatórios. Não faz fortes suposições a respeito da distribuição das ineficiências ou erros e assume que as diferenças de eficiência são estáveis no tempo, enquanto que a média dos erros aleatórios tende para zero ao longo do tempo, ou seja, os erros aleatórios tendem a compensar-se mutuamente ao longo do tempo. Exige a disponibilidade de dados em painel.

[3] *Cross section*: análise efetuada com base em dados de diferentes unidades ou empresas, referentes ao mesmo período.

[4] Dados em painel: análise efetuada com base em dados de diferentes unidades ou empresas em diversos períodos.

- *Thick Frontier Approach* (TFA): a metodologia TFA especifica uma forma funcional e assume que os desvios dos gastos previstos e o mais baixo quartil de gastos, numa determinada classe, representam o erro aleatório, enquanto que a diferença nos gastos previstos entre o quartil mais baixo e o mais elevado representam as ineficiências-X. Pode ser aplicada a dados *cross section* ou a dados em painel.

2.3 MODELOS NÃO PARAMÉTRICOS

Desenvolvida por Farrell (1957) a abordagem não paramétrica não estabelece uma função de produção inicial. Através de técnicas de programação linear, a metodologia determina uma fronteira de eficiência a partir das empresas de "melhor prática", sendo as empresas situadas abaixo da fronteira consideradas ineficientes.

Como referido anteriormente as metodologias mais comuns de entre os modelos não paramétricos são as seguintes:

- *Data Envelopment Analysis* (DEA): a metodologia DEA é uma técnica de programação linear segundo a qual o conjunto de melhores práticas (fronteira de observações) é aquele em que nenhuma outra unidade de decisão ou combinação linear dessas unidades produz mais dados os *inputs*, ou consome menos dados os *outputs*. A fronteira DEA é formada pela combinação linear dos pontos que representam o conjunto das melhores práticas, formando um conjunto convexo de possibilidades de produção. Sendo um método determinístico, assume que todos os desvios entre os gastos observados e a curva fronteira de gastos mínimos, são explicados pela ineficiência.
- *Free Disposal Hull* (FDH): a metodologia FDH é um caso especial da metodologia DEA, em que os pontos das linhas que conectam o vértice DEA não são incluídos na fronteira. Ao contrário da metodologia DEA, a abordagem FDH pressupõe que não é possível a substituição entre combinações de *inputs* na isoquanta, sendo formada pela interseção das linhas observadas numa combinação do tipo Leontief.

Vamos no capítulo seguinte explorar a metodologia DEA dado ser um dos modelos mais utilizados nos estudos de eficiência mais recentes. Esta elevada popularidade deve-se à sua simplicidade na aplicação e na multiplicidade de resultados e de análises que permite efetuar.

3. MODELO DE ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS

3.1 MODELO GERAL

São diversos os autores que defendem a utilização de modelos de avaliação da eficiência com base em múltiplos fatores, dada a complexidade da realidade empresarial.

Segundo Amado (2004) a primeira definição de eficiência técnica foi elaborada por Koopmans em 1951[5], tendo Debreu[6] proposto, no mesmo ano, a primeira medida de eficiência produtiva: o coeficiente de utilização de recursos (*coefficient of resource utilisation*). Foram estes estudos que levaram Farrell (1957) a desenvolver uma metodologia que calculasse, empiricamente, a eficiência relativa de diversas unidades produtivas e que permitisse a decomposição da eficiência produtiva em eficiência técnica e em eficiência preço ou de afetação.

Charnes, Cooper e Rhodes (1978) desenvolveram o modelo proposto por Farrell (1957), convertendo a medida de eficiência técnica obtida pelo modelo inicial (assente num processo *input*/*output*), para um processo de múltiplos *inputs*/*ouputs*.

Desenvolvida por Charnes *et al*. (1978) (1981) a denominada metodologia *Data Envelopment Analysis* (DEA) (Análise Envoltória de Dados) constitui uma técnica de programação matemática linear, que converte múltiplos *inputs* e *outputs* em medidas de eficiência. A conversão é efetuada comparando os recursos (*inputs*) utilizados e os resultados obtidos (*outputs*) em cada *Decision Making Unit* (DMU) relativamente a todas as outras DMU em estudo.

As DMU constituem unidades organizacionais com características semelhantes, de qualquer ramo de atividade (unidades fabris, um conjunto de escolas, bancos, hospitais, empresas, etc.). Consideram-se características semelhantes, unidades que apresentem similaridades tecnológicas, convergência nas atividades desenvolvidas e nos objetivos gerais, bem como semelhantes fatores de *inputs* e *outputs*.

A aplicação da metodologia DEA permite identificar as unidades mais eficientes numa população e, com base nestas, fornecer uma medida de ineficiência para as restantes. Desta forma, a metodologia DEA permite medir a eficiência relativa.

---

[5] Koopmans, T. (1951) An analysis of production as an efficient combination of activities, Activity Analysis of Production and Allocation, Cowles Commission for Research in Economics, Monograph 13, New York: Wiley.

[6] Debreu, G. (1951) The coefficient of resource allocation, Econometrica, 19: 3, p. 273-292.

Na metodologia DEA a noção de eficiência é similar à noção implícita na função de Cobb-Douglas. Contudo, ao invés de avaliar a eficiência por via de uma função de produção predefinida, idêntica para todas as empresas ou unidades em estudo (denominadas no âmbito da DEA como DMU), a fronteira de eficiência é calculada com base nos dados reais das DMU em estudo. Consequentemente, o indicador de eficiência obtido pela metodologia DEA para uma determinada DMU, não é uma medida standard absoluta (como acontece na função Cobb-Douglas), mas uma medida de eficiência relativa às outras DMU em estudo.

A metodologia é classificada como não-paramétrica, dado que não utiliza uma função de produção predefinida idêntica para todas as organizações, na análise da relação *input* – produto - eficiência. A metodologia DEA otimiza cada observação individual com o objetivo de calcular uma fronteira de eficiência determinada pelas unidades Pareto-eficientes. Considera-se uma unidade Pareto-eficiente se, e somente se, ela não consegue melhorar alguma das suas características sem piorar as demais.

Em termos gerais, o objetivo da metodologia DEA consiste em comparar um conjunto de DMU com características semelhantes ou que realizam tarefas similares, mas que consomem diferentes níveis de *inputs* e/ou produzem diferentes níveis de *outputs*. Identificando as DMU eficientes, a metodologia DEA permite medir e localizar a ineficiência e estimar uma função de produção linear por partes, que fornece um *benchmark* para as DMU ineficientes.

O objetivo da metodologia DEA é identificar quais as DMU eficientes, para que se possa avaliar os ajustamentos necessários aos níveis de *inputs* e/ou *outputs* das DMU ineficientes, de modo a que estas possam vir a atingir a eficiência. Desta forma, a metodologia DEA permite: calcular quantitativamente a eficiência relativa das DMU; identificar as fontes e quantidades de ineficiência relativa em cada DMU e maximizar a eficiência de cada DMU.

Os indicadores de eficiência obtidos nesta metodologia assumem, no modelo geral, valores entre 0 e 1 e representam a proporção dos recursos que são usados eficientemente. A DMU mais eficiente da amostra obtém o valor máximo de 1, que corresponde a uma eficiência de 100% e as restantes obterão valores inferiores, dado que o indicador mede a eficiência relativa a esse máximo. Por exemplo, pode dizer-se que uma DMU que apresente um indicador de 0,7 apresenta 70% de eficiência ou que desperdiça 30% dos seus recursos relativamente à DMU com melhores práticas da amostra sujeita às mesmas condições.

A medida de eficiência base de cada DMU (E_j) é obtida pelo rácio constituído entre a soma ponderada de *outputs* e a soma ponderada de *inputs*:

$$E_j = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_{rj} y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_{ij} x_{ij}} \qquad j = 1, \ldots, n$$

Fonte: Adaptado de Charnes et al. (1978: 430)

Com,

$u_{rj} \geq 0$: peso unitário do *output* r da $j_{ésima}$ DMU

$v_{ij} \geq 0$: peso unitário do *input* i da $j_{ésima}$ DMU

$y_{rj} \geq 0$: *output* r da $j_{ésima}$ DMU

$x_{ij} \geq 0$: *input* i da $j_{ésima}$ DMU

m : variáveis *input*

s : variáveis *output*

A metodologia DEA determina os pesos (*u*, *v*) que maximizam o indicador de eficiência de cada DMU, de acordo com a seguinte programação matemática do problema:

$$\max h_0(u,v) = \sum_{r=1}^{s} u_{rj} y_{rj} \Big/ \sum_{i=1}^{m} v_{ij} x_{ij} \qquad \leq 1$$

Fonte: Adaptado de Cooper et al. (2004: 9)

Ou seja, para cada DMU a metodologia DEA define os pesos que maximizam a sua eficiência em relação às outras unidades[7]. Desta forma, cada DMU obtém um índice representativo do seu desempenho relativo, sendo possível determinar quais os níveis de consumo (*input*) e de produção (*output*) que as tornariam eficientes. O índice varia entre 0 e 1 (equivalente a 0 e 100%), sendo que as unidades eficientes têm índice de valor igual a 1 (equivalente a 100%). Note-se contudo, que ter um índice de eficiência de 1 não corresponde, necessariamente, a ser uma DMU eficiente em termos absolutos, mas apenas a ser mais eficiente que as outras DMU incluídas na amostra.

[7] Contudo, é possível atribuir/restringir os pesos de determinadas variáveis, caso o investigador considere que estas possam estar a sub ou sobre contribuir para o cálculo do índice de eficiência. Avkiran (1999) refere que a utilização de demasiadas restrições aos pesos pode condicionar, significativamente, o processo de otimização segundo a metodologia DEA.

Uma DMU é considerada tecnicamente eficiente se não conseguir produzir mais qualquer um dos *outputs* ou reduzir qualquer um dos *inputs* sem reduzir outros *outputs* ou aumentar outros *inputs* (Cooper *et al.*, 2004).

Contudo, duas DMU podem obter o mesmo índice de eficiência, mas apresentarem características muito diferenciadas, dado que o índice de eficiência pode ser compatibilizado com diversas estratégias de gestão. Por exemplo: duas DMU com iguais índices de eficiência em que uma se especializou particularmente na produção de um *output* e a outra na utilização de um determinado *input*.

Para além dos índices de eficiência, para cada DMU ineficiente são identificadas as DMU eficientes que lhe servem de referência e a contribuição de cada uma delas para o cálculo do seu índice de eficiência. A contribuição de cada DMU eficiente de referência é dada pelo indicador lambda (λ) ou peso do par (*peer weight*). A unidade que apresentar maior lambda ou peso no conjunto de unidades de referência, constitui a DMU mais comparável à DMU ineficiente. A DMU que for referenciada o maior número de vezes, como unidade eficiente para as outras, é considerada a DMU líder global (Avkiran, 1999). Isto fará sentido apenas no caso do modelo BCC, em que se obriga a soma dos lambdas a ser igual a um.

Desta forma, o valor de λ_j dá indicação se a DMU_j constitui uma unidade par (comparável) à DMU_{jo}. Se $\lambda_j = 0$ a DMU_j não constitui uma unidade de referência para DMU_{jo}. O valor de $\lambda_j > 0$ indica o peso ou contribuição da DMU_j para o cálculo dos valores objetivo a atingir pela DMU_{jo} de forma a atingir a eficiência.

Contudo, refira-se que no modelo CCR os valores dos lambdas representam apenas os fatores de expansão ou contração que é necessário aplicar aos *inputs* ou *outputs* de cada DMU referência por forma a atingir um *target* para a DMU eficiente. Têm portanto a ver com a dimensão das DMU referência e da DMU em análise.

Os valores-objetivo (*targets*) a atingir pelas DMU ineficientes são calculados considerando que as DMU_{jo} podem melhorar a sua *performance* de forma a atingir a eficiência, eliminando o excesso de consumo de *inputs* ou otimizando os seus níveis de *outputs*.

Em resumo, pode-se enumerar os seguintes benefícios na aplicação da metodologia DEA:

- Não exige uma forma explícita de relacionamento entre *inputs* e *outputs* (sendo desnecessário o conhecimento detalhado do processo de produção);
- Permite a utilização de unidades de valor e grandezas distintas, sem necessidade de estandardizar os dados originais;
- Permite a utilização de amostras de pequena dimensão;

- Calcula os indicadores de eficiência com base em dados reais;
- Permite a definição das unidades eficientes como *benchmarks* para as unidades menos eficientes (ineficientes);
- Otimiza cada observação individual com o objetivo de determinar uma fronteira linear composta pelo conjunto de unidades eficientes;
- Constitui um método multicritério de apoio à decisão, capaz de modelar a complexidade do mundo real.

Os resultados obtidos por via da aplicação da metodologia DEA são muito sensíveis relativamente aos dados utilizados. Incertezas ou imprecisões dos dados utilizados podem promover graves enviesamentos na determinação das fronteiras de eficiência e dos indicadores de eficiência das DMU em estudo (Avkiran, 1999). Regra geral, os métodos não-paramétricos são muito suscetíveis a observações extremas (*outliers*), uma vez que estabelecem linhas custo-fronteira baseadas nas instituições com custos comparativamente mais baixos (Ribeiro, 2006).

Uma das principais limitações da metodologia DEA apontada pelos diversos autores é o facto de esta assumir a ausência de erros aleatórios. Neste contexto, todas as DMU fora da fronteira de eficiência são consideradas ineficientes. A atribuição de toda a diferença entre os valores da fronteira estimada e os valores observados à ineficiência provoca a obtenção de indicadores de ineficiência superiores relativamente a outros métodos de estimação (Ribeiro, 2006).

Além disso, as DMU consideradas eficientes são eficientes apenas em relação às restantes DMU incluídas na amostra. É possível que existam outras DMU (não incluídas na amostra) que detenham níveis de eficiência superiores aos obtidos pelas unidades de melhor prática incluídas na amostra. Uma DMU considerada eficiente não produz necessariamente o máximo de *output* possível de obter com determinados níveis de *inputs* (Avkiran, 1999), ou seja, as empresas de "melhor prática" são as mais eficientes em relação às outras empresas da amostra, mas poderão não ser efetivamente eficientes (Ribeiro, 2006).

EXEMPLO:

Considere-se o caso de uma empresa com diversas lojas. O objetivo dos gestores é assegurar que cada loja consiga otimizar a sua *performance*. Vamos iniciar a análise considerando apenas 1 variável *input* e 1 variável *output*. Neste caso a eficiência de cada loja para transformar recursos (*inputs*) em resultados (*outputs*) seria simplesmente definida pelo seguinte rácio: $\text{Eficiência} = \frac{\text{Output}}{\text{Input}}$

Considere-se que a eficiência vai ser medida através do número de empregados (*input*) e o número de transações ou vendas efetuadas (*output*). A empresa tem 6 lojas que registam os seguintes dados:

Lojas	Input (nº empregados)	Output (nº transações)	Rácio de Eficiência Output/Input
Faro	16	64.000	4.000
Albufeira	10	35.000	3.500
Lisboa	20	175.000	**8.750**
Porto	22	132.000	6.000
Coimbra	30	180.000	6.000
Vila Real	12	100.000	8.333

Fonte: adaptado do exemplo apresentado no software Baxia Frontier Analyst (http://www.banxia.com)

O rácio de *performance* "número de transações processadas por empregado" sugere que a loja de Lisboa se apresenta como a mais eficiente a processar transações de venda, dado que apresenta o maior número de transações efetuadas por cada empregado (8.750). Contrariamente, a loja de Albufeira é a menos eficiente dado que cada empregado apenas processa 3.500 operações de venda.

A eficiência de cada loja relativamente à loja de Lisboa pode ser determinada dividindo o rácio anterior de cada loja pelo rácio da loja de Lisboa. Nomeadamente:

Lojas	Eficiência Relativa (Cálculo)	Rácio de Eficiência Relativa
Faro	4.000/8.750	0,457
Albufeira	3.500/8.750	0,400
Lisboa	8.750/8.750	1,000
Porto	6.000/8.750	0,686
Coimbra	6.000/8.750	0,686
Vila Real	8.333/8.750	0,952

Fonte: adaptado do exemplo apresentado no software Baxia Frontier Analyst (http://www.banxia.com)

Se cada rácio obtido for multiplicado por 100 então a loja de Lisboa é 100% eficiente (em relação às restantes lojas) e Albufeira apenas apresenta 40% de eficiência.

A loja de Lisboa é considerada a loja mais eficiente, dado que alcançou a melhor *performance* de vendas por empregado e, logo, deve ser um exemplo de boas práticas a seguir pelas restantes lojas. A loja de Lisboa será então utilizada como uma referência na definição de objetivos, de forma a aumentar a eficiência das restantes lojas. Por exemplo: de forma a igualar a *performance* de Lisboa, a loja de Albufeira terá como objetivo aumentar o número de transações de 35.000 para 87.500 de forma a obter o mesmo rácio de eficiência da loja de Lisboa (rácio *output*/*input* = 87.500/10 = 8.750). Ou seja, a obter um rácio de eficiência relativa de 100%.

Serão raros os casos em que se regista a existência de um único *input* e de um único *output*. Existem sempre diversas variáveis determinantes do nível de eficiência de uma unidade. Vamos agora considerar que os gestores das lojas pretendem distinguir as vendas por dois segmentos de clientes: particulares e empresas, ou seja:

Input: Número de empregados (STAFF)

Output 1: Número de transações processadas a consumidores particulares (PART)

Output 2: Número de transações processadas a empresas (EMP)

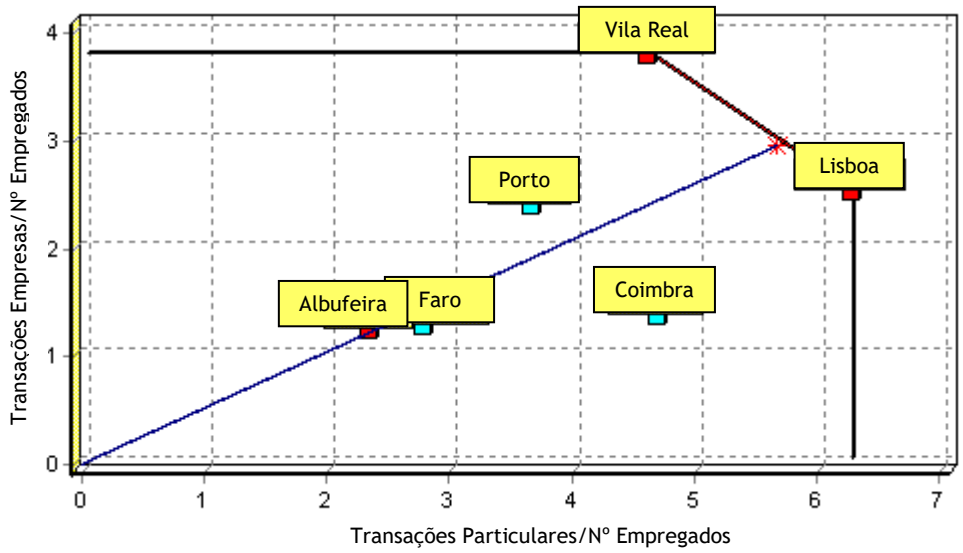
Lojas	Input STAFF	Output 1 PART	Output 2 EMP	Rácio de Eficiência 1 PART/STAFF	Rácio de Eficiência 2 EMP/STAFF
Faro	16	44.000	20.000	2.750	1.250
Albufeira	10	23.000	12.000	2.300	1.200
Lisboa	20	125.000	50.000	**6.250**	2.500
Porto	22	80.000	52.000	3.636	2.363
Coimbra	30	140.000	40.000	4.666	1.333
Vila Real	12	55.000	45.000	4.583	**3.750**

Fonte: adaptado do exemplo apresentado no software Baxia Frontier Analyst (http://www.banxia.com)

A eficiência de cada loja na produção de cada resultado (*output*) pode ser calculada dividindo cada um dos seus *outputs* pelo *input* respetivo e verificar qual a loja que apresenta os rácios mais elevados.

Como vimos anteriormente, quanto mais elevado o rácio, mais eficiente a loja na produção desse resultado. A loja de Lisboa é mais eficiente no que respeita a transações com particulares, mas a loja de Vila Real é mais eficiente nas transações com empresas. Neste caso a noção de eficiência é menos clara. Qual a medida a considerar?

Considere-se o gráfico que representa ambos os indicadores para todas as lojas:



Fonte: adaptado do exemplo apresentado no software Baxia Frontier Analyst (http://www.banxia.com)

O gráfico representa o conceito fundamental da metodologia DEA. A posição das lojas de Lisboa e Vila Real demonstram um nível de *performance* superior em relação às restantes lojas. Podemos desenhar uma linha entre Lisboa e Vila Real que, conjuntamente com a junção dos respetivos pontos ao respetivo eixo, representa a denominada linha de fronteira de eficiência. A fronteira de eficiência, que deriva das lojas mais eficientes na amostra, representa um padrão de boas práticas. Desta forma, poderá ser utilizada como uma referência para a medição da eficiência das restantes. Note-se que isto não implica que as unidades na fronteira não possam melhorar a sua *performance*. Podem e devem. Contudo, este tipo de metodologia e análise não permitem esse tipo de avaliação.

A fronteira de eficiência "envelopa" as unidades ineficientes no seu interior e mostra claramente o nível de (in)eficiência relativa de cada uma delas. As unidades (lojas) sobre a linha de fronteira apresentam uma *performance* superior a qualquer uma das localizadas no interior da fronteira. As unidades (lojas) sobre a linha de fronteira apresentam uma eficiência relativa de 100% e as localizadas no

interior da fronteira são menos eficientes, apresentando níveis de eficiência abaixo dos 100%.

Albufeira, por exemplo, poderia aumentar o seu nível de eficiência se aumentasse os seus resultados, na mesma proporção, mantendo o mesmo número de empregados. Neste caso iria atingir a linha de fronteira assinalada no gráfico. Ou, em alternativa, poderia reduzir o número de empregados e manter o seu nível de resultados. O efeito seria o mesmo. A sua eficiência atual está a ser calculada simplesmente com base no rácio entre a sua distância à origem e a distância entre a origem e o ponto na linha de fronteira. Isto dá uma eficiência de 41% à loja de Albufeira, 75% à loja de Coimbra, 71% à loja do Porto e 46% à loja de Faro.

Qualquer *software* DEA apura estes cálculos automaticamente e de uma forma simples. Nem todos os *softwares* apresentam a representação gráfica dado que esta apenas é possível na presença, no máximo, de dois *inputs* e um *output* ou um *input* e dois *outputs*. Para os casos ondem se incluem mais variáveis o problema torna-se multidimensional e já não permite a representação gráfica. Mas é nestes casos que a utilização de um *software* específico se torna imprescindível a fim de viabilizar as análises pretendidas.

3.2 PRINCIPAIS VARIANTES DO MODELO GERAL: AS ECONOMIAS DE ESCALA

Para além de avaliar a eficiência técnica, a metodologia DEA também permite avaliar as economias de escala presentes no processo produtivo. Sendo as noções de economias de escala utilizadas na metodologia DEA semelhantes às noções constantes na literatura clássica sobre a teoria da produção, as mesmas são incorporadas na metodologia DEA por via da utilização de diferentes modelos. Identificam-se duas variantes principais:

- **Modelo tipo CCR**, que considera a inexistência de uma relação significativa entre a escala das operações e o nível de eficiência, assumindo rendimentos constantes à escala, ou seja, o modelo assume que um aumento dos *outputs* é proporcional ao aumento dos *inputs* em qualquer escala de produção (**C**harnes, **C**ooper e **R**hodes, 1978);

- **Modelo tipo BCC**, que considera rendimentos variáveis à escala e não assume proporcionalidade entre *inputs* e *outputs* (**B**anker, **C**harnes e **C**ooper, 1984). Este modelo assume que a eficiência de uma unidade aumenta ou diminui com o aumento da sua dimensão ou escala de produção. Segundo alguns autores este modelo é mais apropriado para amostras de grande dimensão.

Segundo Canhoto (1996) dado que nesta abordagem, de tipo não-paramétrico, não se define *a priori* uma função de produção idêntica para todas as DMU, as

propriedades da escala de produção também são inicialmente desconhecidas, criando um problema relativamente à escolha do modelo a utilizar.

Avkiran (1999) aconselha o cálculo e a comparação dos índices de eficiência com base nos dois tipos de modelo (com rendimentos constantes à escala - CCR e com rendimentos variáveis à escala - BCC). Se a maioria das DMU apresentar índices de eficiência diferentes segundo os dois modelos, pode-se assumir a presença de rendimentos variáveis à escala; se a maioria apresentar índices de eficiência idênticos segundo os dois modelos, pode-se trabalhar, de uma forma mais simplificada, segundo os modelos de rendimentos constantes à escala.

Segundo Anjos (2005), no que se refere aos rendimentos à escala, ou seja, o impacto na produção (*output*) resultante de aumentos nas quantidades de *inputs*, podem verificar-se as seguintes situações:

- Rendimentos constantes (maiores quantidades de *inputs* provocam um aumento proporcional de *outputs*, assumindo que as unidades operam em escala ótima, com maximização da utilização dos *inputs*).
- Rendimentos variáveis, que podem registar as seguintes situações: rendimentos crescentes (aumentos nas quantidades de *inputs* promovem aumentos mais que proporcionais nos *outputs*); rendimentos decrescentes (aumentos nas quantidades de *inputs* promovem redução nos *outputs*); rendimentos não-crescentes (aumentos nas quantidades de *inputs* promovem aumentos menos que proporcionais nos *outputs*); rendimentos não-decrescentes (aumentos nas quantidades de *inputs* não causam variação nos *outputs*).

A medida de eficiência obtida pela aplicação do modelo CCR é considerada uma medida de eficiência global e é constituída por dois tipos de eficiência: pela eficiência técnica pura e pela eficiência de escala.

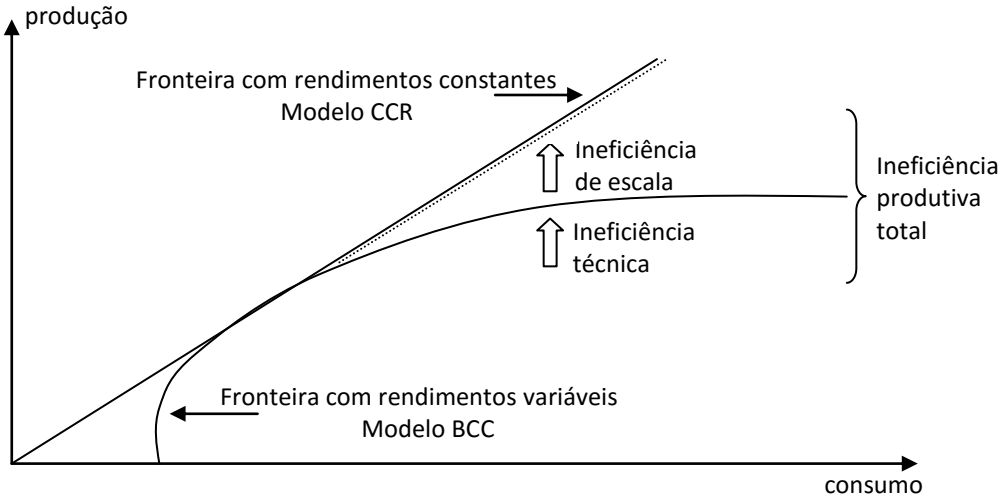
A fim de clarificar esta questão, é necessário aprofundar o conceito de eficiência técnica global (ETG) decompondo o mesmo em dois componentes: a eficiência técnica pura (ETP) e a eficiência de escala (S), sendo que: $ETG = ETP \times S$.

O indicador de eficiência técnica pura reflete a (sub)utilização/desperdício de recursos e o indicador de eficiência de escala a possibilidade da DMU (não) ter optado pela escala ótima de produção, ou seja, a presença de rendimentos (não) constantes à escala.

O índice de eficiência obtido pelo modelo CCR (ao qual é imposto a condição de rendimentos constantes à escala) representa a eficiência técnica global, que mede as ineficiências relacionadas com a configuração dos *inputs*/*outputs*, bem como com a escala das operações. O índice de eficiência obtido pelo modelo BCC representa apenas a eficiência técnica pura.

O indicador de eficiência de escala (S) é calculado com base nos indicadores anteriores, ou seja: S = ETG/ETP. Independentemente do modelo utilizado sabe-se que ETG ≤ ETP (vide figura 2).

Figura 2. Fronteiras de produção para os modelos CCR e BCC



Fonte: MacDowell (2007: 116)

A fim de analisar o tipo de rendimentos à escala de cada DMU_s, calculam-se os indicadores ETG_s, ETP_s e $S_s = ETG_s/ETP_s$. E quando:

$ETG_s = 1$: a DMU_s é global e tecnicamente eficiente. Neste caso $ETP_s = S_s = 1$, o que representa que a DMU_s utilizou os *inputs* nas proporções adequadas ($ETP_s = 1$) e operou numa escala de produção eficiente ($S_s = 1$), ou seja, segundo rendimentos constantes à escala.

$ETG_s < 1$: a DMU_s é global e tecnicamente ineficiente. As ineficiências podem ser provenientes de ineficiências técnicas (ETP) ou de escala (S).

Quando $S_s < 1$, diz-se que a DMU_s é ineficiente em termos de escala e a fim de averiguar o tipo de escala (crescente ou decrescente) da observação, a mesma é avaliada relativamente a uma fronteira de rendimentos não-crescentes à escala (mais restritiva que a produzida pelo modelo BCC). Considerando N_s o indicador de eficiência relativo a esta fronteira, quando:

$N_s = ETP_s$: a DMU_s opera em rendimentos decrescentes à escala. As fronteiras produzidas pelos modelos BCC e de rendimentos não-crescentes à escala coincidem e correspondem à fronteira mais restritiva, ou seja, a última.

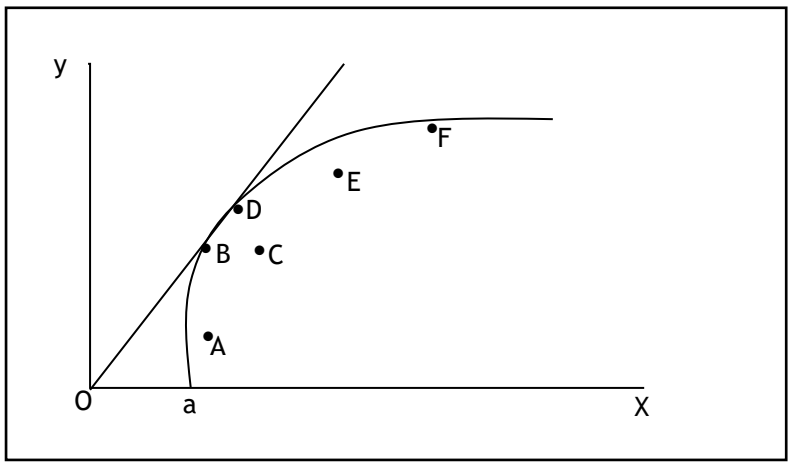
$N_s \neq ETP_s$: a DMU_s opera em rendimentos crescentes à escala. As fronteiras produzidas pelos modelos BCC e de rendimentos não-crescentes à escala não

coincidem, situação registada com observações ineficientes apenas quando ocorrem rendimentos crescentes à escala.

Em resumo:

- Rendimentos constantes à escala: ETG = ETP
- Rendimentos crescentes à escala: ETG < ETP e N ≠ ETP
- Rendimentos decrescentes à escala: ETG < ETP e N = ETP

Figura 3. Representação gráfica dos rendimentos à escala



Fonte: Canhoto (1996: 22)

Considere um conjunto de observações representadas na figura 3. A linha OBD representa a fronteira segundo o modelo CCR (rendimentos constantes à escala); a linha OBDF representa a fronteira de rendimentos não-crescentes à escala; a linha BDF representa a fronteira do modelo BCC (rendimentos variáveis à escala). Os indicadores de eficiência indicam os resultados constantes na tabela 2.

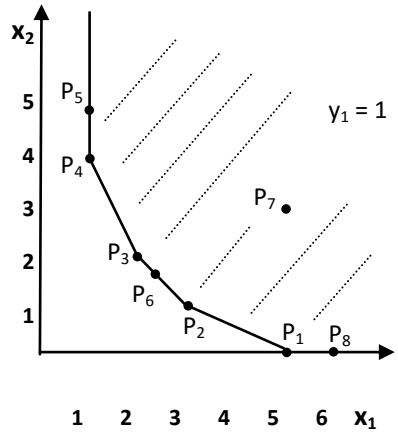
Tabela 2. Os indicadores de eficiência e o tipo de rendimentos à escala

Obs A	ETG < ETP < 1	S < 1	N < ETP	Rendimentos crescentes à escala
Obs B	ETG = ETP = 1	S = 1		Rendimentos constantes à escala
Obs C	ETG = ETP < 1	S < 1	N = ETP	Rendimentos decrescentes à escala
Obs D	ETG = ETP = 1	S = 1		Rendimentos constantes à escala
Obs E	ETG < ETP < 1	S < 1	N = ETP	Rendimentos decrescentes à escala
Obs F	ETG < ETP = 1	S < 1	N = ETP	Rendimentos decrescentes à escala

Fonte: Adaptado de Canhoto (1996: 23)

Charnes *et al*. (1991) definem que as DMU podem ser classificadas segundo quatro classes, nomeadamente: E, E', F e N. A classe E representa o conjunto de DMU extremamente eficientes (P_1, P_2, P_3 e P_4 na figura 4); E' representa o conjunto de DMU eficientes mas que não constituem pontos extremos (P_6 na figura 4); F representa o conjunto de DMU com eficiência fraca dado que apresentam um nível de eficiência relativa máximo (100%) mas apresentam folgas (P_5 e P_8 na figura 4) e N representa o conjunto de DMU ineficientes (P_7 na figura 4).

Figura 4. Representação gráfica das classificações atribuídas às DMU



Fonte: Thrall (1996: 114)

A aplicação do modelo *Slack Based Model* (SBM) permite a otimização das folgas quando a redução proporcional do nível de *inputs* e/ou o aumento do nível de *outputs* não é suficiente.

O modelo SBM reflete todo o tipo de ineficiências existentes, permitindo caracterizar as ineficiências das DMU fracamente eficientes, ou seja, DMU tecnicamente eficientes mas com folgas nas variáveis *input*/*output*, apurando uma medida de eficiência não-radial[8] (ρ). Os níveis de eficiência deste modelo são iguais aos do modelo CCR com orientação a *input* (ρ = ETG) apenas quando não se regista a existência de quaisquer folgas (*slacks*) nas variáveis (Cooper *et al.*, 2007).

Através deste modelo pode-se decompor as (in)eficiências segundo o tipo radial e não-radial, dado que o modelo SBM orientado a *input* reflete a eficiência técnica (ETG) e outras eficiências, denominadas pelos autores de *Mix Efficiencies* (MIX).

[8] Os indicadores de eficiência radial medem a distância da observação à fronteira de eficiência.

$$\text{Input oriented SBM} = \text{Radial Eff(ET)} \times \text{Mix Eff(MIX)}$$

Fonte: Cooper et al. (2007: 155)

O indicador de eficiência não-radial (ρ) é decomposto com base nos indicadores de eficiência já analisados da forma seguinte:

$$\rho = \text{ETG} \times \text{MIX}$$

$$\rho = \text{ETP} \times \text{S} \times \text{MIX}$$

Fonte: Cooper et al. (2007: 155)

3.3 EXTENSÕES DOS MODELOS

Tal como já foi referido anteriormente, para cada DMU a metodologia DEA define os pesos que maximizam a sua eficiência em relação às outras unidades. É possível que uma determinada DMU possa reduzir ao máximo (atribuindo peso nulo) os pesos correspondentes aos *inputs*/*outputs* nos quais possa apresentar-se bastante ineficiente. Desta forma, é necessário analisar em profundidade o *ranking* produzido pelo modelo DEA, de forma a compreender a *performance* de cada DMU.

Segundo Ali (1993) as características matemáticas do modelo DEA que admite rendimentos variáveis à escala, modelo maioritariamente aplicado nos diversos estudos sobre a eficiência, permitem que as DMU que apresentam o valor mais baixo num dos *inputs* (ou o valor mais elevado num dos *outputs*) sejam automaticamente consideradas eficientes, mesmo que as restantes variáveis não apresentem as melhores relações. Essas DMU são denominadas falsas-eficientes, eficientes à partida ou por defeito.

Na tentativa de melhor compreender os resultados obtidos pelos modelos DEA tradicionais (CCR e BCC), por vezes controversos e dificilmente justificáveis, surgiram algumas metodologias complementares de análise, tais como os níveis de supereficiência, fronteira invertida, eficiência composta, análises contexto-dependente, matriz de eficiências cruzadas, entre outras. Diversos autores apresentam estes métodos como forma de promover a discriminação nos modelos DEA. Não sendo estas propriamente recentes na literatura, são poucos os estudos empíricos que registam a sua aplicação, sendo, na grande maioria das vezes, ignoradas as limitações supra enunciadas.

É esperado que um índice de eficiência de 100% reflita uma unidade de boas práticas que sirva de referência e que determine os valores-objetivo às restantes DMU (consideradas ineficientes). Desta forma, é importante analisar o contexto em que tal classificação é obtida.

É necessário analisar os pesos e os *inputs*/*outputs* virtuais (variáveis ponderadas pelos pesos) de forma a avaliar a contribuição de cada variável para o nível de eficiência obtido, dado que uma DMU pode ignorar determinadas áreas (refletidas nos *inputs*/*outputs*) em que se apresenta bastante ineficiente.

Em termos gerais, é necessário identificar as causas e soluções para que as DMU ineficientes possam alcançar a eficiência e analisar em que contexto foi alcançado os níveis de eficiência máximos pelas DMU consideradas eficientes.

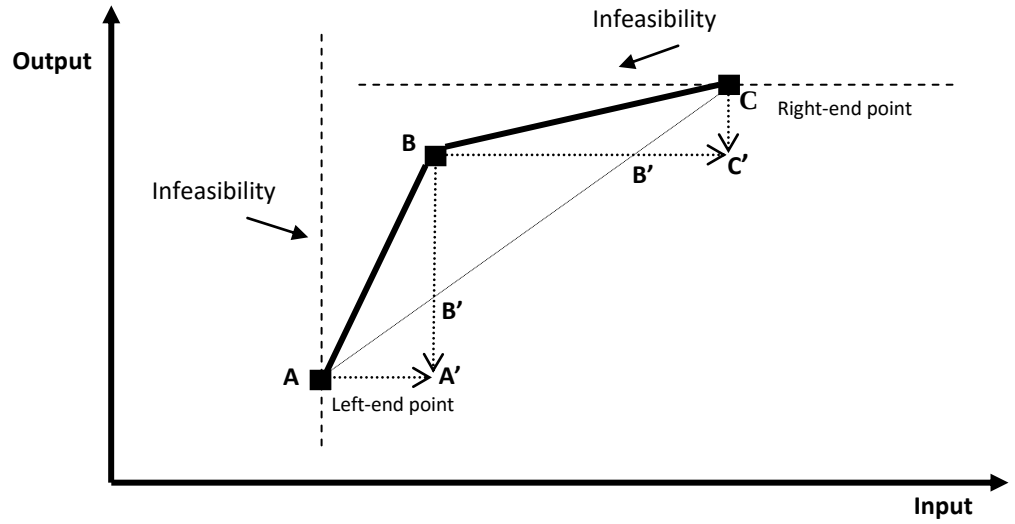
Nos modelos da supereficiência a DMU em estudo não é incluída no conjunto de referência. O nível de supereficiência identifica o aumento de *inputs* e/ou a redução de *outputs* que a DMU eficiente pode suportar sem deixar de ser eficiente. Logo, quanto mais elevado o nível de supereficiência, maior o intervalo de variação permitido. Dado que a DMU em estudo é retirada do conjunto das unidades de comparação, o nível de supereficiência obtido pode ser superior a 100%, permitindo o desempate das DMU consideradas eficientes.

Diversos autores consideram o nível de supereficiência como uma medida de estabilidade. Neste contexto, quando se regista a inviabilidade (*infeasibility*) do cálculo do nível de supereficiência, tal representa que o nível de eficiência da DMU em causa é estável para qualquer variação de recursos num modelo com orientação a *inputs* (e estável para qualquer variação de produção num modelo com orientação a *outputs*). Nestes casos utilizam o símbolo $+\infty$ para representar o nível de supereficiência, ou seja, a inviabilidade do cálculo do nível de eficiência representa o mais alto nível de eficiência.

Seiford e Zhu (1999a) demonstram que, segundo a classificação de Charnes *et al*. (1991), a inviabilidade do cálculo do nível de supereficiência apenas ocorre para as DMU extremamente eficientes, localizadas nos extremos da fronteira de eficiência, conforme a figura 5. Além disso demonstram que num modelo com orientação a *input*, o cálculo do nível de supereficiência apenas é inviável caso a DMU apresente rendimentos constantes ou decrescentes à escala e num modelo com orientação a *output* caso a DMU apresente rendimentos constantes ou crescentes à escala.

Este modelo tem como principais vantagens o facto de permitir uma discriminação entre as DMU eficientes, sem alterar o nível de eficiência e o *ranking* das ineficientes, uma vez que a exclusão destas (ineficientes) não altera a fronteira de eficiência. A principal limitação apontada a este modelo é o facto de que a ordenação obtida depende apenas de condições locais da fronteira e não de propriedades gerais das DMU em causa.

Figura 5. Inviabilidade no modelo BCC de supereficiência



Fonte: Seiford e Zhu (1999a: 177)

O modelo da fronteira invertida permite a identificação das DMU falsamente eficientes no modelo BCC. Apresentado num estudo em língua japonesa por Yamada em 1994[9], a fronteira invertida (Inverted DEA – IDEA) é baseada na inversão entre *inputs* e *outputs*.

Enquanto os modelos DEA clássicos são extremamente benevolentes com as DMU avaliadas, dado que estas podem ser consideradas eficientes por via do subconjunto de variáveis que lhes forem mais favoráveis, os modelos DEA invertidos representam uma avaliação pessimista das DMU, dado que a fronteira invertida é composta pelas DMU com as piores práticas de gestão, sendo usualmente denominada por fronteira ineficiente. Logo, quanto maior o nível de eficiência invertida, menor a eficiência da DMU.

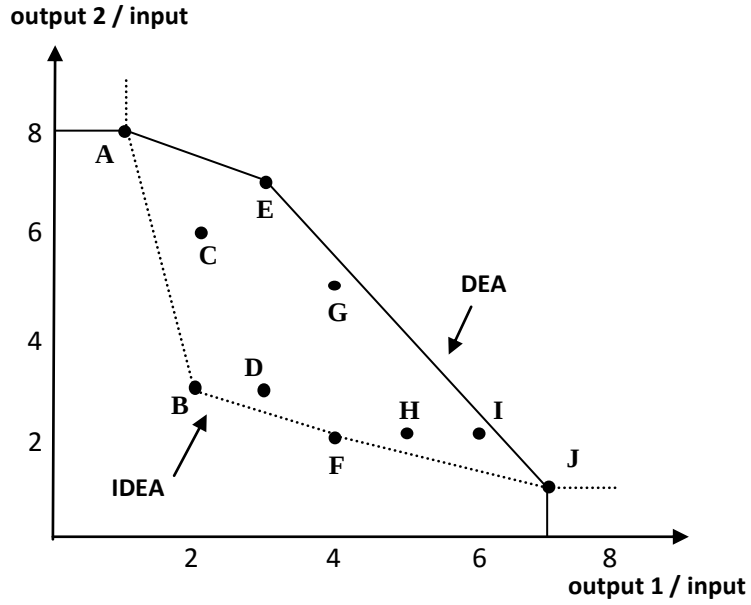
Ao observar a figura 6 verifica-se que é possível a existência de DMU simultaneamente nas duas fronteiras. As DMU A e J são consideradas eficientes (na fronteira DEA) e ineficientes (na fronteira IDEA). Estas DMU são denominadas peculiares e encontram-se normalmente localizadas em pontos extremos das fronteiras (Entani *et al.*, 2002).

A conjugação da fronteira de eficiência DEA com a fronteira de ineficiência IDEA (*Inverted* DEA) constitui uma das formas mais simples para identificar as DMU falsas-eficientes e permite o apuramento do nível de eficiência composta. Este indicador de eficiência exige que uma DMU eficiente apresente um bom desempenho nas áreas em que é melhor (elevado nível de eficiência padrão) e que

[9] Yamada, Y.; T. Matui; M. Sugiyama (1994) New analysis of efficiency based on DEA, Journal of the Operations Research Society of Japan, 37: 2, p. 158-167.

apresente um desempenho aceitável nas áreas em que é pior (baixo nível de eficiência invertida). São muito poucos os *softwares* que permitem o apuramento deste indicador, o que tem dificultado a disseminação da sua aplicação.

Figura 6. Fronteira padrão (DEA) e fronteira invertida (IDEA)



Fonte: Entani et al. (2002: 34)

Dado que a fronteira de eficiência padrão representa uma abordagem otimista e a fronteira invertida uma pessimista, pode-se apurar o nível de eficiência composta que engloba as duas vertentes.

O nível de eficiência composta representa a média aritmética entre a eficiência em relação à fronteira DEA clássica (padrão) e o complemento da eficiência em relação à fronteira invertida[10]. Normalmente é utilizado o nível de eficiência composta normalizada, que se obtém dividindo os valores da eficiência composta de cada DMU pelo maior valor de eficiência composta obtido na amostra.

$$\text{Eficiência composta} = \frac{\left[\text{eficiência padrão} + \left(1 - \text{eficiência invertida}\right)\right]}{2}$$

Fonte: Meza et al. (2007: 24)

[10] É utilizado o respetivo complemento uma vez que o modelo da fronteira invertida reflete uma medida de ineficiência.

Desta forma, o nível de eficiência composta normalizada exige que uma DMU eficiente apresente um bom desempenho nas áreas em que é melhor (elevado nível de eficiência padrão) e que apresente um desempenho aceitável nas áreas em que é pior (baixo nível de eficiência invertida).

A análise de tipo contexto-dependente permite avaliar o grau de atratividade ou de progresso de uma determinada DMU relativamente às DMU que lhe são mais similares, sendo as DMU avaliadas dentro de um determinado contexto.

No modelo DEA clássico as DMU são avaliadas em relação a um conjunto de unidades consideradas eficientes e que compõem uma única fronteira de eficiência, que se pressupõe de boas práticas. Numa análise contexto-dependente as DMU eficientes da fronteira clássica (considerada de nível 1) são eliminadas da amostra e é estimada uma fronteira de nível 2 com as restantes DMU ineficientes. A fronteira de nível 2 será composta pelas DMU consideradas eficientes num novo contexto. Determinam-se sucessivas fronteiras de eficiência de nível 3, 4, (…) através da eliminação sucessiva das DMU eficientes que compõem as fronteiras dos diversos níveis.

O indicador de eficiência obtido em cada nível (por exemplo: nível 1) relativamente a um nível posterior (por exemplo: nível 2) reflete a atratividade das DMU eficientes nesse nível (nível 1) relativamente às restantes DMU, ou seja, dentro de determinado contexto (Zhu, 2014).

A análise pode ser efetuada com base numa perspetiva de progresso. O indicador de eficiência obtido em cada nível, por exemplo: nível 2, relativamente a um nível anterior (nível 1) reflete o progresso necessário às DMU eficientes na fronteira de nível 2 a fim de alcançar a fronteira de eficiência de nível 1 (Zhu, 2014).

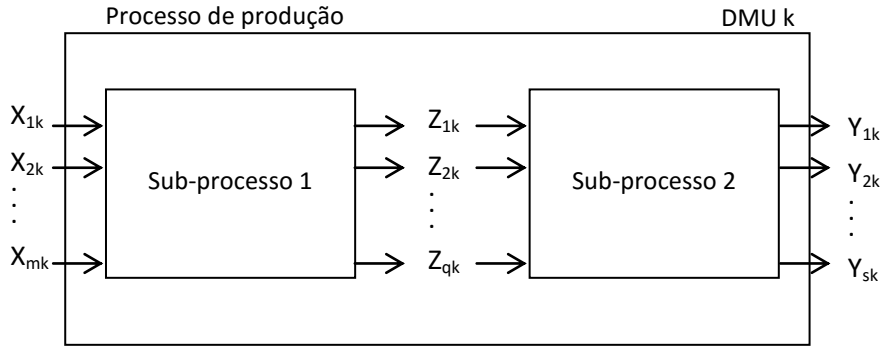
Por diversas vezes os valores-objetivo definidos pelo modelo DEA podem ser muito difíceis de concretizar na prática. O modelo contexto-dependente permite a definição de objetivos faseada, de forma que as DMU que se encontram numa fronteira de nível avançado (por exemplo: nível 5) possam, progressivamente, melhorar o seu nível de eficiência, passando por níveis intermédios (nível 4, 3, …) até atingir a fronteira de eficiência de nível 1.

Os modelos bietápicos pressupõem que o processo produtivo é composto por subprocessos (ou etapas) conforme figura 7 e têm como particularidade utilizar os *outputs* do modelo da etapa 1 como *inputs* (exclusivos) do modelo da etapa 2. As variáveis comuns aos dois modelos são denominadas, neste contexto, de medidas intermediárias (*intermediate measures*).

O modelo bietápico parte do pressuposto que a (in)eficiência de uma etapa influencia a (in)eficiência da outra devido à existência de medidas intermediárias comuns e visa a minimização da utilização dos recursos a fim de maximizar os

resultados produzidos. Desta forma, na etapa 1 o modelo é orientado a *inputs* e na etapa 2 é orientado a *outputs*, considerando a existência de uma solução ótima em que as duas etapas atingem a eficiência, sendo o processo bietápico considerado um processo único ou global. Desta forma, o modelo permite o apuramento dos valores ótimos para a variável intermediária, de forma a atingir a eficiência em ambas as etapas. O índice de eficiência global do modelo bietápico constitui uma soma ponderada das eficiências das etapas individuais.

Figura 7. Modelo bietápico



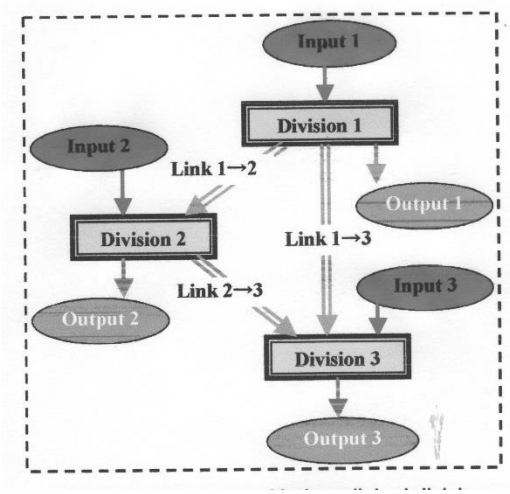
Fonte: Adaptado de Kao e Hwang (2008: 420)

Os modelos mais recentes da metodologia DEA constituem modelos de múltiplas etapas ou com ligações em rede (NetWork DEA). Já existem diversos estudos empíricos que aplicam este tipo de modelos a setores de atividade de operacionalização complexa, tais como, ensino, tecnologias da informação, transportes, logística, etc. (Liu *et al.*, 2013) (Tone e Tsutsui, 2009) (Zhu, 2014; 2009) (Benegas, 2012)

O modelo NetWork DEA considera um conjunto de n DMU cada qual operando num esquema de produção em cadeia constituído por K departamentos. Em cada uma dessas DMU, um departamento k utiliza m_k *inputs* para a produção de r_k produtos. Adicionalmente, um link que corresponde ao envio de *inputs* intermediários do departamento k para o departamento h será denotado por (k; h) (a ordem é importante nessa notação, tal que (h; k) representa o link do departamento h para o departamento k). Seja L o conjunto de todos os links. Por fim, para cada link (k; h) $\in$ L seja $t_{(k;h)}$ o número de itens nesse link, ou seja, $t_{(k;h)}$ é o número total de produtos produzidos pelo departamento k e que são utilizados como *inputs* no departamento h (Benegas, 2012: 574).

A figura 8 ilustra o funcionamento de uma DMU operando com três departamentos.

Figura 8. NetWork DEA (exemplo de DMU com 3 departamentos)



Fonte: Tone e Tsutsui (2009: 27)

3.4 ORIENTAÇÕES DOS MODELOS

Os modelos DEA podem ser aplicados de forma a minimizar o nível de *inputs* para se alcançar um determinado nível de *outputs* objetivo (*input oriented*), ou a maximizar o nível de *outputs* face a um determinado nível fixo de *inputs* (*output oriented*), ou ainda, a maximizar o nível de eficiência através da otimização da relação *input*/*output* (simultaneamente a minimização do nível de *inputs* e a maximização do nível de *outputs*, normalmente conseguida através do modelo Aditivo).

O modelo DEA com orientação a *input* deriva do seguinte problema de programação linear:

$$\text{Min}\,\theta - \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+\right)$$

Fonte: Zhu (2009: 13)

Com,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta\, x_{io} \qquad \text{i = 1, …, m}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro} \qquad \text{r = 1, …, s}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$ restrição adicional para o Modelo BCC

E o modelo DEA com orientação a *output*:

$$\text{Max } \varphi + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+ \right)$$

Fonte: Zhu (2009: 13)

Com,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{io}$$ i = 1, …, m

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = \phi\, y_{ro}$$ r = 1, …, s

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$ restrição adicional para o Modelo BCC

Berger *et al*. (1993) alertam para a importância de estudos sobre as ineficiências ao nível dos *outputs* (*output inefficiencies*) dado que estas são, em média, superiores às ineficiências ao nível dos *inputs* (*input inefficiencies*). Ou seja, a maioria das ineficiências traduzem-se mais em termos de resultados insuficientes do que em termos de gastos excessivos.

Aquando da utilização de rendimentos constantes à escala e variáveis de *inputs* controláveis pelos gestores, a opção pelo tipo de orientação do modelo não irá afetar os resultados dos índices de eficiência, pois ambos tendem a estimar a mesma fronteira e, consequentemente, identificar as mesmas unidades eficientes (Avkiran, 1999) (Anjos, 2005). Para os setores de atividade que enfatizam o controlo de gastos, é natural a seleção da orientação ao nível dos *inputs*. A seleção do tipo de orientação deve ser efetuada com base nos fatores (*inputs* ou *outputs*) sobre os quais a unidade detenha um maior controlo.

A inclusão de variáveis *input* não controláveis pelos gestores cria constrangimentos à minimização dos *inputs* e provoca a obtenção de diferentes índices de eficiência (Avkiran, 1999). Desta forma, as unidades ineficientes podem não ser as mesmas segundo as duas orientações.

O analista deve ter em atenção que a orientação do modelo DEA pode conduzir a diferentes resultados quanto à caracterização da escala de operações. Um determinado conjunto de dados pode ser caracterizado pela existência de rendimentos crescentes à escala segundo um modelo com orientação a *input* e pela existência de rendimentos decrescentes à escala segundo um modelo com orientação a *output*, por exemplo.

3.5 VARIÁVEIS INPUT/OUTPUT

3.5.1 Seleção das variáveis *input/output*

Uma das principais etapas na aplicação da metodologia DEA para avaliação da eficiência relativa é a seleção das variáveis de *input* e de *output* a incluir no modelo.

Segundo Vaz (2000) os *inputs* devem refletir todos os recursos usados pelas DMU, incluindo fatores envolventes, que possam afetar os *outputs*. O autor propõe o seguinte processo para selecionar as variáveis a incluir no modelo:

- Selecionar o tipo de modelo, orientação e medida de eficiência mais adequada aos objetivos do estudo;
- Calcular a medida de eficiência pretendida com base num conjunto de variáveis de *inputs* e *outputs*;
- Calcular a tabela de correlações entre a medida de eficiência obtida e as variáveis;
- Construir, passo a passo, o modelo de eficiência, evitando incluir no modelo variáveis que apresentem elevada correlação com outras já consideradas.

A metodologia DEA presume a existência de uma relação entre os *inputs* e os *outputs*, sendo suficiente analisar uma tabela de correlações entre as variáveis que se pretendem incluir no modelo.

Segundo Golany e Roll (1989) a seleção das variáveis *input/output* relevantes pode ser realizada após analisado o campo de atuação da empresa. O principal problema que decorre na identificação das mesmas é que o investigador pode confundir as que determinam a eficiência, com as que explicam as diferenças de eficiência[11]. Os autores identificam três fases para o processo de seleção de variáveis: (1) *Judgmental screening*, (2) *Non-DEA quantitative analysis* e (3) *DEA based analysis*. A primeira fase refere-se à distinção entre variáveis determinantes de eficiência e

[11] Por exemplo, a variável trabalho pode determinar a eficiência, enquanto a proporção da variável trabalho pode explicar a eficiência.

variáveis explicativas de ineficiência, que pode ser resolvida através da análise de causalidade. Na segunda fase sugere-se o recurso a análises de regressão para determinar se uma variável deve ser *input* ou *output*. A terceira fase, sugerida por Charnes *et al*. (1978), pode ser utilizada para identificar as variáveis que deverão ser excluídas dado não acrescentarem eficiência significativa ao modelo.

Muitos dos modelos de seleção propostos nos estudos empíricos são de tipo *stepwise*, onde as variáveis vão sendo progressivamente incluídas/excluídas com base nos resultados obtidos.

Meza *et al*. (2007) argumentam que pouco tem sido discutido sobre a problemática associada à seleção de variáveis nos modelos DEA, tomando em consideração o significativo impacto que estas têm sobre os indicadores de eficiência. Referem que na grande maioria dos estudos empíricos a seleção das variáveis incluídas nos modelos é efetuada com base na opinião de especialistas ou na disponibilidade dos dados. Os autores consideram que o facto de uma diferente escolha de variáveis conduzir a resultados diferentes não deve ser interpretado como uma fraqueza da metodologia DEA mas um benefício, dado que diferentes conjugações de variáveis permitem analisar diferentes dimensões de eficiência.

Meza *et al*. (2007) apresentam o que denominam Método Compensatório de Normalização Única para proceder à seleção de variáveis a incluir nos modelos DEA, de acordo com as fases definidas na figura 9. Segundo os autores deve iniciar-se o processo a partir da identificação de potenciais variáveis a incluir nos modelos, recorrendo à opinião de elementos decisores, especialistas e/ou analistas. Procede-se à criação de cenários com diversas combinações entre as variáveis inicialmente identificadas (se o número de variáveis for reduzido deve considerar-se todas as combinações possíveis de *inputs*/*outputs*). Para cada cenário calcula-se a eficiência média, o número de DMU na fronteira de eficiência e os seguintes indicadores normalizados:

Normalização das eficiências médias (S_{EF}) para cada conjunto de variáveis, que reflete o ajuste à fronteira de eficiência:

$$S_{EF} = \frac{\text{eficiência média}}{10}$$

Fonte: Meza et al. (2007:28)

E a normalização da quantidade de DMU eficientes (S_{DIS}) para cada conjunto de variáveis, que reflete o poder de discriminação do modelo:

$$S_{DIS} = 10 \times \frac{n - N}{n - 1}$$

Fonte: Meza et al. (2007:28)

Com,

n : número total de DMU

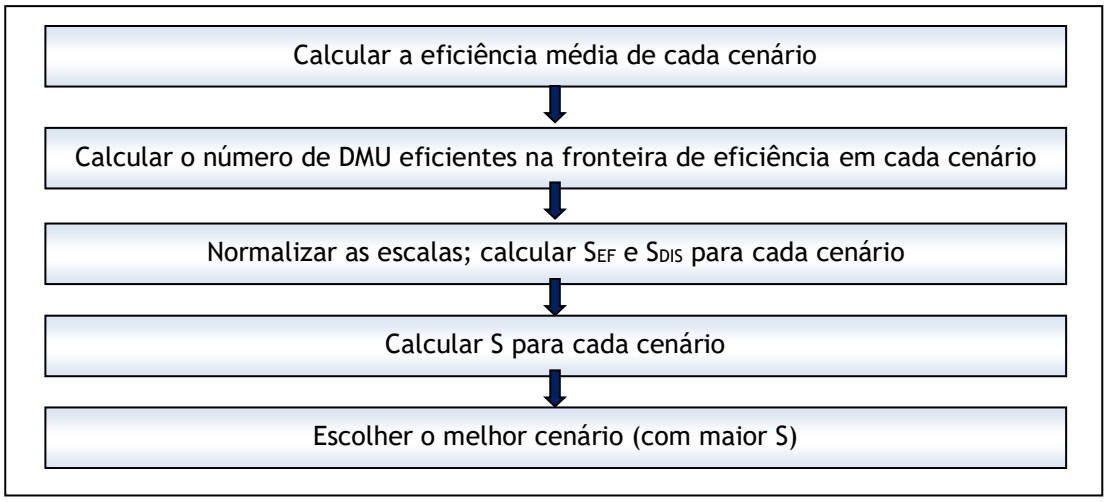
N : número de DMU na fronteira eficiente

$$S = S_{EF} + S_{DIS}$$

Fonte: Meza et al. (2007:28)

A combinação de variáveis a ser selecionado é o que apresentar o maior índice S (somatório de S_{EF} e S_{DIS}) que constitui uma medida de compromisso entre o bom ajuste à fronteira de eficiência e a boa discriminação do modelo.

Figura 9. Método compensatório de normalização única



Fonte: Adaptado de Meza et al. (2007:27)

As variáveis devem ser quantificáveis e podem ser expressas em diferentes unidades de medida (unidades físicas, monetárias, número, etc.). A metodologia DEA permite a inclusão de variáveis originalmente qualitativas. Contudo, estas últimas devem assumir valores numéricos mediante uma determinada escala de conversão.

Além disso, é necessário analisar a função produção e os seus principais recursos e resultados. Os recursos utilizados pelas unidades ou as condições que afetam as suas operações são consideradas *inputs* e os benefícios mensuráveis constituem os *outputs*. Geralmente a classificação é efetuada de uma forma quase evidente. Contudo, existem fatores que podem ser classificados numa ou noutra categoria e

é o investigador que decide a sua classificação, sendo usual a utilização de técnicas de regressão linear.

Diversos autores incluem no modelo variáveis socioeconómicas sob a forma de *inputs* não-arbitrários ou não controláveis pelos gestores e que caracterizam o mercado envolvente, tais como: o rendimento anual médio das famílias, o número de novas pequenas empresas ou a presença de concorrentes. Também se utilizam frequentemente variáveis não-contabilísticas sob a forma de *inputs* arbitrários ou controláveis pelos gestores, tais como, o número de postos de venda, ou a qualidade do serviço prestado ao cliente.

3.5.2 Número de variáveis *input/output* a incluir nos modelos

Tal como na estatística ou em qualquer outra metodologia orientada empiricamente, a medida de eficiência relativa da metodologia DEA exige a gestão dos graus de liberdade. No modelo envoltório o número de graus de liberdade aumenta com o número de DMU incluídos na amostra e diminui com o número de variáveis *input/output* considerado.

Todas as variáveis consideradas relevantes deveriam ser incluídas no modelo DEA em estudo. Contudo, quanto maior o número de variáveis *input/output* em relação ao número de DMU, maior a probabilidade de uma qualquer DMU conseguir otimizar os pesos para um subconjunto de *inputs/outputs* de forma a alcançar a eficiência e, logo, menor o poder discriminatório do modelo. Desta forma, o número de variáveis *input/output* a incluir no modelo deverá ser o mais reduzido possível.

A definição da dimensão da amostra (número de DMU) não é consensual entre os autores, registando-se diversos estudos empíricos com amostras de pequena dimensão. As abordagens mais comuns são as seguintes:

$$\text{nº DMU's} \geq \text{nº inputs} \times \text{nº outputs}$$

A dimensão da amostra deve ser pelo menos o valor do produto entre o número de *inputs* e de *outputs*.

$$\text{nº DMU's} \geq 2(\text{nº inputs} \times \text{nº outputs})$$

A dimensão da amostra deve ser pelo menos o dobro do produto entre o número de *inputs* e de *outputs*.

$$\text{nº DMU's} \geq 2(\text{nº inputs} + \text{nº outputs})$$

A dimensão da amostra deve ser pelo menos o dobro da soma do número de *inputs* e de *outputs*.

$$\boxed{\text{nº DMU's} \geq 3(\text{nº inputs} + \text{nº outputs})}$$

A dimensão da amostra deve ser pelo menos três vezes maior que a soma do número de *inputs* e de *outputs*.

$$\boxed{\text{nº DMU's} \geq \max\{\text{nº inputs} \times \text{nº outputs}, 3(\text{nº inputs} + \text{nº outputs})\}}$$

A dimensão da amostra deve ser maior ou igual ao valor máximo obtido do produto entre o número de *inputs* e de *outputs* ou do triplo da soma do número de *inputs* e de *outputs*.

3.6 EXEMPLOS DE APLICAÇÕES PRÁTICAS

Seguidamente apresenta-se alguns exemplos de aplicações práticas. Todos os resultados dos modelos DEA foram obtidos através de *software* específico. Foram utilizados diversos *softwares* de acordo com o tipo de modelos ou análises disponíveis em cada um deles, nomeadamente, o DEASolver[12] (Cooper *et al.*, 2007) e o DEAFrontier[13] (Zhu, 2009; 2014) que constituem suplementos ao solucionador do Excel e o SIAD[14] (Mello *et al.*, 2005) (resultados específicos enunciados na tabela 3).

Em termos gerais, qualquer *software* específico DEA permite a aplicação dos modelos gerais CCR e BBC (com orientação a *input* e *output*) e produz os resultados mais tradicionais associados a este tipo de metodologia, tais como os índices de eficiência, DMU de referência (pares ou *peer group*), pesos, folgas, tipo de rendimentos à escala, objetivos (*targets*) e estatísticas gerais.

Tabela 3. Modelos ou resultados específicos obtidos nos *softwares* DEA

Software	Produção de Resultados
DEASolver	SBM; Supereficiência
DEAFrontier	*Context Dependent*; *Two-stage Model* (Modelo bietápico)
SIAD	Fronteira Invertida (IDEA); Eficiência Composta

Fonte: Elaborado pela autora

Chama-se a atenção para o facto de ser necessário a introdução das variáveis *input* e *output* de acordo com os padrões estabelecidos por cada *software*. Exemplifica-se seguidamente a forma correta de introdução das variáveis para os 3 *softwares*

[12] *Software* DEASolver: http://www.saitech-inc.com/products/prod-dsp.asp
[13] *Software* DEAFrontier: http://www.deafrontier.net/
[14] *Software* SIAD: http://www.uff.br/decisao (este *software* é de *download* totalmente gratuito).

DEA utilizados na resolução dos casos práticos incluídos neste manual. Para estimar os modelos apenas será necessário introduzir a folha de dados. Todas as restantes folhas, constantes nos ficheiros com as resoluções dos casos práticos, são produzidas pelo programa sob a forma de resultados para análise.

Os *softwares* DEASolver e DEAFrontier constituem suplementos ao solucionador do Excel e, por isso, os dados são introduzidos diretamente na folha de cálculo de acordo com as regras apresentadas abaixo.

O *software* SIAD é específico para a metodologia DEA. Neste *software* os dados podem ser introduzidos diretamente na folha de dados disponível no programa ou importados do Excel. No caso de pretender importar os dados do Excel, deve seguir os seguintes passos:

- Criar a folha de dados no Excel de acordo com as regras apresentadas;
- Guardar o ficheiro Excel como ficheiro de texto separado por tabulações (.txt);
- Abrir o ficheiro .txt no programa SIAD.

Esta breve explicação não substitui a necessidade de consultar os respetivos manuais dos *softwares* a utilizar, que deverão ser escolhidos com base nos modelos e tipos de análises que se pretendem efetuar. Além disso, existem diversos outros *softwares* disponíveis no mercado, bastante *user friendly*, com menus muito intuitivos e produção de resultados bastante simplificada e pronta a utilizar em apresentações. Contudo, dado que estes programas constituem uma versão mais comercial deste tipo de análise, apresentam preços de aquisição mais elevados, atingindo alguns deles algumas centenas ou milhares de euros.

São exemplos deste tipo de *softwares*:

- KonSi DEA Analysis (http://www.dea-analysis.com/)
- Banxia Frontier Analyst (http://www.banxia.com/frontier/)

Instruções para a introdução de dados nos *softwares* utilizados na resolução dos casos práticos:

DEASolver:

A folha de dados tem de denominar-se "Dat" e as variáveis são introduzidas em colunas seguidas (sem espaços ou colunas vazias entre elas). As variáveis *input* são identificadas com a expressão (I) e as variáveis *output* com a expressão (O) antes do respetivo nome. A título de exemplo:

DMU	(I)CP	(I)NEMP	(I)NL	(O)VPS
1	25.368	67	2	229.293
2	32.619	87	16	281.406
3	16.489	20	1	81.012
(…)	(…)	(…)	(…)	(…)

DEAFrontier:

A folha de dados tem de denominar-se "Data" e as variáveis *input* são separadas das variáveis *output* por uma coluna vazia. A título de exemplo:

DMU	CP	NEMP	NL		VPS
1	25.368	67	2		229.293
2	32.619	87	16		281.406
3	16.489	20	1		81.012
(…)	(…)	(…)	(…)		(…)

No caso do modelo bietápico: considerando que no exemplo anterior as variáveis CP, NEMP e NL constituem os *inputs* da etapa 1 e a variável VPS a variável intermediária, deve introduzir-se novamente uma coluna vazia para separar esta última dos *outputs* da etapa 2.

SIAD:

A folha de dados tem de denominar-se "Dat" e as variáveis são introduzidas em colunas seguidas (sem espaços ou colunas vazias entre elas). Nas primeiras 3 células da primeira linha são definidos os números de DMU em estudo, o número de variáveis *input* e o número de variáveis *output*.

A título de exemplo, para um estudo de caso com 32 empresas (DMU) em estudo, considerando 2 variáveis *input* e 2 variáveis *output*:

32	2	2		
DMU	**GE**	**ID**	**V**	**PS**
1	6.634	19.311	704	6.087
2	7.633	31.490	8.774	14.321
3	2.720	51.804	7.159	11.518
(…)	(…)	(…)	(…)	(…)
32	25.066	274.377	49.308	58.820

CASO PRÁTICO 1. SELEÇÃO DE VARIÁVEIS INPUT/OUTPUT

Pretende-se criar um modelo DEA para o setor de retalho alimentar com base numa abordagem de produção (orientado a *input*) a fim de minimizar os recursos utilizados pelas empresas para a criação de rendimento.

Foi inicialmente identificado um conjunto de recursos (variáveis *input*) com potencial para integrar o modelo DEA, devido à sua frequente utilização em relatórios e análises económico-financeiras no setor. O quadro 1 identifica todas essas variáveis.

Quadro 1. Identificação das variáveis potenciais

Var	Sigla	Nome	Descrição
I1	AF	Ativo Fixo	Total do investimento líquido
I2	CP	Capital Próprio	Total do capital próprio
I3	NEMP	Nº Empregados	Total de empregados no final do ano
I4	NL	Nº Lojas	Total do número de lojas no final do ano
I5	GCP	Gastos com Pessoal	Remunerações e encargos com o pessoal
I6	GE	Gastos de Estrutura	Gastos com o pessoal, gastos gerais administrativos e depreciações e amortizações
O1	VPS	Vendas	Total de vendas e prestação de serviços

Fonte: Elaborado pela autora

Considere os dados constantes no ficheiro Excel Caso Prático 1.xlsx disponibilizado em anexo a este manual. A amostra é composta pelos dados de 37 empresas (DMU) cujas variáveis foram expressas em euros, exceto as variáveis número de empregados (NEMP) e número de lojas (NL).

A seleção das variáveis a incluir no modelo DEA foi efetuada de acordo com a metodologia proposta por Meza *et al*. (2007), nomeadamente, segundo o Método Compensatório de Normalização Única, descrito no ponto 3.5.1.

Segundo este método deve-se proceder à estimativa da eficiência média de diversos modelos compostos por diferentes combinações entre as variáveis potenciais e posteriormente calcular os indicadores normalizados (S_{EF}; S_{DIS}; S). O melhor modelo é o que apresentar o valor de S mais elevado.

Dos 30 cenários simulados para a criação do Modelo de Produção, os modelos que obtiveram o índice S mais elevado (S = 9,49) são compostos pelas variáveis *input* Número de Empregados (I3) ou Gastos de Estrutura (I6) e pela variável *output* Vendas (O1).

Quadro 2. Resultados dos 8 cenários com maior índice S

In/Out	I2/O1	I3/O1	I2I3/O1	I3I4/O1	I5/O1	I6/O1	I4I6/O1	I2I3I6/O1
Ef. média	0,50	0,43	0,57	0,51	0,50	0,48	0,55	0,59
S_{EF}	0,05	0,04	0,06	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06
S_{DIS}	8,89	9,44	8,61	8,89	9,17	9,44	8,89	8,61
S	8,94	**9,49**	8,67	8,94	9,22	**9,49**	8,94	8,67
n	37	37	37	37	37	37	37	37
N	5	3	6	5	4	3	5	6

INPUT		OUTPUT	
I3	Nº Empregados	O1	Vendas

ou

INPUT		OUTPUT	
I6	Gastos de Estrutura	O1	Vendas

Fonte: Elaborado pela autora

Note-se ainda que, em qualquer um dos modelos, a dimensão da amostra (37 empresas) supera o número mínimo considerado necessário pelas abordagens mais comuns, nomeadamente:

$$\boxed{\text{nº DMUs} \geq \text{nº inputs} \times \text{nº outputs} \quad \rightarrow \quad 37 \geq 1}$$

$$\boxed{\text{nº DMUs} \geq 2\,(\text{nº inputs} \times \text{nº outputs}) \quad \rightarrow \quad 37 \geq 2}$$

$$\boxed{\text{nº DMUs} \geq 2\,(\text{nº inputs} + \text{nº outputs}) \quad \rightarrow \quad 37 \geq 4}$$

$$\boxed{\text{nº DMUs} \geq 3\,(\text{nº inputs} + \text{nº outputs}) \quad \rightarrow \quad 37 \geq 6}$$

$$\boxed{\text{nº DMUs} \geq \max\left\{\text{nº inputs} \times \text{nº outputs},\, 3\,(\text{nº inputs} + \text{nº outputs})\right\} \quad \rightarrow \quad 37 \geq 6}$$

Além disso, dado que a metodologia DEA presume a existência de uma relação entre os *inputs* e os *outputs*, foram calculados os coeficientes de correlação entre as variáveis que se pretendem incluir nos modelos selecionados. Conforme se pode verificar no quadro 3, a correlação entre as variáveis é bastante elevada, o que valida qualquer um dos modelos selecionados.

Quadro 3. Correlações entre as variáveis selecionadas

	I3	O1
I3	1	
O1	0,9834	1

	I6	O1
I6	1	
O1	0,9845	1

Fonte: Elaborado pela autora

CASO PRÁTICO 2. MODELOS GERAIS CCR E BCC

Com base nos dados constantes no ficheiro Excel Caso Prático 2 e 3.xlsx disponibilizado em anexo a este manual, foram estimados modelos DEA CCR e BCC (orientados a *input*), a partir do *software* DEASolver, a fim de minimizar os recursos (*inputs*) utilizados pelas DMU na produção dos resultados (*outputs*) obtidos.

As 37 DMU em estudo pertencem ao setor de retalho alimentar. Os modelos DEA incorporam 3 variáveis *input* (capital próprio, número de empregados e número de lojas) e 1 variável *output* (vendas e prestação de serviços). Apresenta-se seguidamente alguns dos principais resultados obtidos pela estimação dos modelos e respetivas análises.

Tipos de (in)eficiências: cada modelo DEA estima um determinado tipo de eficiência. Para avaliar os diversos tipos de (in)eficiências registadas é necessário

estimar diferentes modelos DEA e apurar e comparar os respetivos índices. O quadro 1 apresenta alguns dos índices de eficiência obtidos:

Quadro 1. Tipos de (in)eficiências do Modelo DEA estimado

DMU	CCR ETG	BCC ETP	Ef. Escala S = ETG/ETP	SBM_C ρ	Mix Eff Mix = ρ/ETG
DMU3	0,322	**1,000**	0,322	0,203	0,631
DMU8	**1,000**	**1,000**	**1,000**	**1,000**	**1,000**
DMU10	0,276	0,287	0,964	0,150	0,544
DMU11	0,373	0,432	0,863	0,195	0,523
DMU15	0,438	0,439	0,997	0,301	0,688
DMU16	**1,000**	**1,000**	**1,000**	**1,000**	**1,000**
DMU20	**1,000**	**1,000**	**1,000**	**1,000**	**1,000**
DMU21	0,387	**1,000**	0,387	0,201	0,520
DMU23	0,255	0,312	0,818	0,157	0,614
DMU24	**1,000**	**1,000**	**1,000**	**1,000**	**1,000**
DMU28	0,351	**1,000**	0,351	0,208	0,592
DMU29	0,771	0,990	0,778	0,485	0,630
DMU31	0,100	0,115	0,873	0,077	0,773
DMU32	0,329	0,333	0,990	0,153	0,466
(…)	(…)	(…)	(…)	(…)	(…)
Média	**0,317**	**0,606**	**0,523**	**0,234**	**0,741**

Fonte: Elaborado pela autora de acordo com os resultados obtidos do DEASolver

Considera-se que para o setor em estudo o modelo mais apropriado é o modelo com rendimentos variáveis à escala (BCC). Contudo, a fim de caracterizar e avaliar o tipo de ineficiências existentes também foram estimados os modelos CCR e SBM. O índice de eficiência obtido pelo modelo CCR (ao qual é imposta a condição de rendimentos constantes à escala) representa a eficiência técnica global (ETG), que mede as ineficiências relacionadas com a gestão de recursos e resultados, bem como a escala de operações. O índice de eficiência obtido pelo modelo BCC

representa a eficiência técnica pura (ETP), que reflete a (sub)utilização ou desperdício de recursos. Desta forma, o índice de eficiência de escala (S), que mede a capacidade das DMU para decidir sobre a escala ótima de produção (ou seja, a presença de CRS) pode ser obtido através dos dois indicadores anteriores, uma vez que: ETG = ETP $\times$ S.

O modelo BCC apresenta uma eficiência média de 0,606, ou seja, de 60,6%, que será o mesmo dizer que se regista um desperdício de 39,4% de recursos. Dado que o modelo foi simulado com orientação a *input*, conclui-se que, em média, as DMU poderiam produzir o mesmo nível de *outputs* com menos 39,4% de recursos.

A fronteira de eficiência (modelo BCC) é composta por 7 DMU, nomeadamente: DMU3, DMU8, DMU16, DMU20, DMU21, DMU24 e DMU28, que obtêm o nível de eficiência máxima (100%).

Apenas se registam 4 DMU globalmente eficientes, nomeadamente: DMU8, DMU16, DMU20 e DMU24. Estas DMU utilizam os recursos nas proporções adequadas (ETP = 1) e operam numa escala de produção eficiente (S = 1), ou seja, segundo rendimentos constantes à escala (modelo CCR).

A eficiência técnica global média é muito baixa (31,7%). Para além da DMU29 que apresenta uma ETG = 77,1%, as restantes DMU, ou seja, 86,5% da amostra, apresenta uma ETG inferior a 44%.

Verifica-se que as DMU3, DMU28 e DMU21 são tecnologicamente eficientes (ETP = 1) mas não operam na escala de produção mais eficiente, obtendo níveis de eficiência global muito baixos (32,2%, 35,1% e 38,7% respetivamente).

A eficiência técnica pura média (60,6%) é mais elevada que a global (31,7%), o que revela a existência de ineficiências de escala em muitas DMU. Verifica-se que 70,3% das DMU apresenta eficiência de escala abaixo dos 65%.

Por outro lado, as DMU15, DMU32, DMU10, DMU31, DMU11 e DMU23 apresentam elevadas eficiência de escala, mas elevadas ineficiências na gestão dos seus recursos (níveis de ETP muito baixos). Todas estas DMU apresentam rendimentos crescentes à escala, exceto a DMU15 que apresenta (por projeção na fronteira de eficiência) rendimentos constantes à escala.

A medida de eficiência não-radial (ρ) revela que as DMU8, DMU16, DMU20 e DMU24, para além de globalmente eficientes, não registam a existência de quaisquer folgas (*slacks*) nas variáveis, dado que ρ = ETG. Os níveis de eficiência não-radial são, em média, muito baixos (23,4%), o que revela a existência de níveis elevados de folgas nos recursos.

O quadro 2 apresenta alguns resultados obtidos quanto às folgas registadas em algumas DMU. Note-se que as DMU eficientes não apresentam folgas nos recursos e

a DMU12, por exemplo, poderia ter conseguido obter os mesmos resultados com menos 1.109 empregados (NEMP) e menos 286 lojas (NL).

Quadro 2. Folgas registadas em algumas DMU

DMU	Score	Excess CP	Excess NEMP	Excess NL	Shortage VPS
DMU8	**1,000**	-	-	-	-
DMU12	0,803	-	1.109	286	-
DMU16	**1,000**	-	-	-	-
DMU20	**1,000**	-	-	-	-
DMU24	**1,000**	-	-	-	-
DMU25	0,640	338.828	-	243	-
DMU27	0,866	-	-	267	-

Fonte: Elaborado pela autora de acordo com os resultados obtidos do DEASolver

Em termos gerais pode-se concluir que a maioria das DMU apresenta níveis de eficiência muito baixos, o que representa a necessidade de um grande esforço na melhoria da utilização dos recursos.

O quadro 3 exemplifica a informação obtida relativamente ao tipo de rendimentos à escala (RTS – *Return to Scale*) caracterizado através do *software* DEASolver. São contabilizadas as DMU eficientes com características de rendimentos crescentes à escala (*Increase Returns to Scale* - IRS), constantes (*Constant Returns to Scale* - CRS) ou decrescentes (*Decrease Returns to Scale* - DRS). Para as DMU ineficientes as características dos rendimentos à escala são as referentes à respetiva projeção na fronteira de eficiência.

Quadro 3. Caracterização do tipo de rendimentos à escala (Modelo BCC)

DMU	Score	RTS	RTS Projetada
DMU1	0,791		Increasing
DMU6	0,639		Decreasing
DMU8	**1,000**	Constant	
DMU9	0,435		Increasing

DMU	Score	RTS	RTS Projetada
(…)	(…)	(…)	(…)

Fonte: Elaborado pela autora de acordo com os resultados obtidos do DEASolver

Quadro 4. Resumo do número de DMU por tipos de rendimentos à escala

	Modelo BCC		
RTS	Eficiente	Estimada	Total
Nº IRS	1	20	21
Nº CRS	4	1	5
Nº DRS	2	9	11
Total	**7**	**30**	**37**

Fonte: Elaborado pela autora de acordo com os resultados obtidos do DEASolver

Verifica-se que a maioria (56,8%) das DMU apresenta características de rendimentos crescentes à escala, o que justifica, em parte, a escolha do tipo de modelo DEA BCC efetuada. Estas DMU poderiam beneficiar, em termos de eficiência, com um aumento de dimensão (escala).

Para cada DMU em estudo são identificadas as DMU eficientes que lhe servem de referência (pares ou *peer group*) e a contribuição de cada uma delas para o cálculo do seu nível de eficiência. Como se pode observar no quadro 5 o grupo de referência das DMU eficientes é constituído pela própria DMU. Note-se que dado se estar a utilizar o modelo BCC a soma dos *lambdas* (λ) tem de ser igual a 1 (100%).

Quadro 5. Níveis de eficiência e *peer groups* do Modelo BCC

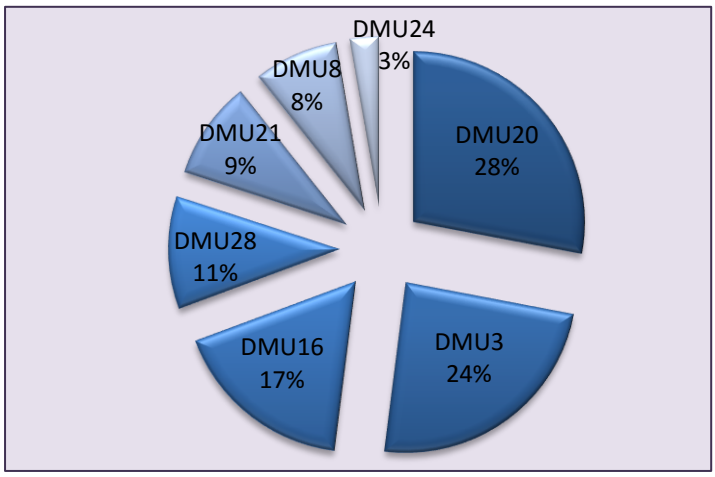
DMU	Score	Reference set (λ)			
DMU3	1,000	DMU3	1,000		
DMU8	1,000	DMU8	1,000		
DMU20	1,000	DMU20	1,000		
DMU21	1,000	DMU21	1,000		
DMU28	1,000	DMU28	1,000		

DMU	Score	Reference set (λ)					
DMU29	0,990	DMU20	0,984	DMU21	0,012	DMU28	0,003
DMU14	0,944	DMU20	0,584	DMU28	0,416		
(…)	(…)	(…)	(…)	(…)	(…)	(…)	(…)

Fonte: Elaborado pela autora de acordo com os resultados obtidos do DEASolver

Como se pode ver no gráfico 1, a DMU referenciada o maior número de vezes como unidade eficiente para os seus pares é a DMU20 (28%), seguida pela DMU3 (24%) e pela DMU16 (17%).

Gráfico 1. DMU de referência no Modelo BCC



Fonte: Elaborado pela autora de acordo com os resultados obtidos do DEASolver

Em relação às DMU consideradas ineficientes é importante analisar os valores-objetivo (*targets*) que foram definidos pelo modelo, de forma a conseguir promover os seus níveis de eficiência relativamente às DMU que lhe servem de referência (*peer group*).

O quadro 6 exemplifica o tipo de informação que pode ser produzida, de forma a comparar o desempenho obtido por uma DMU ineficiente, em relação às DMU eficientes que lhe servem de referência. Desta forma é possível identificar as áreas em que a DMU é mais fraca relativamente às outras e como promover a sua eficiência através da definição de objetivos a atingir.

A DMU28 e a DMU21 contribuíram em 55,7% e 44,3%, respetivamente, para o cálculo do nível de eficiência da DMU12. Desta forma, a DMU28 constitui a unidade

mais comparável à DMU12, uma vez que apresenta maior lambda (λ) no conjunto das suas unidades de referência.

Constata-se através do quadro 6 que a DMU12 apresenta mais 36,1% de lojas (NL), mas menos 27,4% de vendas (VPS) que a DMU28; apresenta mais do dobro (123,8%) do número de empregados (NEMP) e de lojas (103,6%), mas apenas mais 90,3% de vendas que a DMU21. Por outras palavras, a DMU21 e a DMU28 apresentam um rácio de produtividade (*output/input*) superior à DMU12 nas variáveis analisadas.

Quadro 6. Performance da DMU12 relativamente aos seus pares (exemplo)

Indicadores	DMU12		*Peer-group*			
	Ineficiente	*Output / Input*	DMU21	*Output / Input*	DMU28	*Output / Input*
Eficiência relativa	80,3%		100%		100%	
λ			44,3%		55,7%	
Input: CP	4.899.255	8,0	1.905.459	10,8	5.541.096	9,8
Input: NEMP	20.783	1.888,4	9.285	2.221,0	20.562	2.628,1
Input: NL	1.629	24.092,5	800	25.777,3	1.197	45.145,2
Output: VPS	39.246.611		20.621.866		54.038.767	

Fonte: Elaborado pela autora de acordo com os resultados obtidos do DEASolver

Através do quadro 7 verifica-se que a DMU12 poderia obter o mesmo nível de vendas e promover, simultaneamente, o seu nível de eficiência relativa, ajustando as variáveis *input* para os valores-objetivo definidos pelo modelo DEA, nomeadamente: reduzir em 19,8% os capitais próprios (CP), em 25,1% o número de empregados (NEMP) e em 37,3% o número de lojas (NL). Esta DMU apresenta rendimentos decrescentes à escala.

Como se pode constatar através deste exemplo, os resultados produzidos pelo modelo carecem de uma análise ponderada, uma vez que alguns dos objetivos definidos pelo mesmo podem ser muito difíceis de concretizar na prática. Além disso, para além dos valores-objetivo definidos, é possível encontrar um sem número de soluções alternativas, que de igual forma permitirão aumentar os níveis de eficiência da DMU em estudo sem pôr em causa o seu normal funcionamento, através de um planeamento de objetivos faseado, por exemplo. Também será necessário complementar este tipo de análise com as ações que a DMU terá de implementar de forma a concretizar com sucesso os objetivos definidos.

Quadro 7. Valores-objetivo para a DMU12 (exemplo)

No.	DMU	*Score*	Objetivo	Ajustamento	%
	Input/Output	Valor	(*target*)		
12	**DMU12**	**0,803**			
	CP	4.899.255	3.931.763	- 967.492	- 19,8%
	NEMP	20.783	15.570	- 5.213	- 25,1%
	NL	1.629	1.021	- 608	- 37,3%
	VPS	39.246.611	39.246.611	-	0,0%

Fonte: Elaborado pela autora de acordo com os resultados obtidos do DEASolver

Uma análise de tipo contexto-dependente (ver caso prático 4) permite complementar este tipo de estudos, dado que avalia o grau de atratividade ou de progresso de uma determinada DMU relativamente às DMU que lhe são mais similares, sendo as mesmas avaliadas dentro de um determinado contexto.

Verifica-se no quadro 8 a contribuição de cada *input* para os níveis de eficiência das DMU eficientes. Por exemplo: 57,6% do nível de eficiência da DMU24 provém da variável número de lojas (NL). Esta mesma variável (NL) apenas contribui em 6,2% para o nível de eficiência da DMU28, que obtém 93,8% do seu nível de eficiência da variável capital próprio (CP).

Quadro 8. *Inputs* virtuais das DMU eficientes do Modelo BCC

Input	DMU3	DMU8	DMU16	DMU20	DMU21	DMU24	DMU28
CP	0,000	1,000	1,000	0,991	0,979	0,000	0,938
NEMP	1,000	0,000	0,000	0,009	0,021	0,424	0,000
NL	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,576	0,062

Fonte: Elaborado pela autora de acordo com os resultados obtidos do DEASolver

Estes resultados podem ser explicados à luz das conclusões de diversos autores, que defendem que duas DMU com características muito diferenciadas podem obter o mesmo nível de eficiência, resultando este de estratégias de gestão diferenciadas.

Denominam-se DMU com *well-rounded performance* as que obtêm o seu nível de eficiência com base numa distribuição equilibrada por todas as variáveis em estudo e não apenas num pequeno subgrupo de variáveis. O nível de eficiência de DMU como a DMU8 ou a DMU16 pode estar apenas a refletir um perfil invulgar das respetivas variáveis de capital próprio (CP) por exemplo.

Embora os pesos e as variáveis virtuais possam ajudar a identificar as áreas em que determinada DMU é mais "forte", é necessário algum cuidado na análise transversal entre DMU. Por exemplo, o facto de a DMU24 apresentar um valor inferior (42,4%) à DMU3 (100%) na variável número de empregados (NEMP), tal não implica necessariamente que a DMU3 seja mais eficiente a gerir a mesma, uma vez que concentra a obtenção do seu nível de eficiência exclusivamente nesta variável. A DMU24 pode estar a gerir esta variável de uma forma tanto ou mais eficiente que a DMU3, uma vez que apresenta uma distribuição mais dispersa pelos diversos recursos. A análise aos pesos e às variáveis virtuais deve ser complementada com estudos externos ao contexto DEA que ajudem a identificar os perfis de *performance* e de gestão das diversas DMU.

CASO PRÁTICO 3. MODELO DA SUPEREFICIÊNCIA

Com base nos dados constantes no ficheiro Excel do caso prático anterior (Caso Prático 2 e 3.xlsx) disponibilizado em anexo a este manual, foi estimado o modelo da supereficiência DEA BCC (orientado a *input*), a partir do *software* DEASolver, a fim de complementar os resultados obtidos no modelo geral.

Apresenta-se seguidamente o principal contributo obtido pela estimação deste modelo, que complementa os resultados do *ranking* produzidos pelo modelo BCC geral.

Tal como já foi referido anteriormente no caso prático 2, a fronteira de eficiência do Modelo BCC é composta por 7 DMU consideradas extremamente eficientes, com um nível de eficiência igual a 1 (100%) no modelo BCC geral, não apresentando estes, neste modelo, quaisquer folgas (*slacks*). Verifica-se contudo no quadro seguinte que, de entre estes 7, as DMU16 e a DMU28 apresentam inviabilidade no cálculo do nível de supereficiência.

De acordo com o demonstrado por Seiford e Zhu (1999a) num modelo com orientação a *input*, o cálculo do nível de supereficiência apenas é inviável caso a DMU apresente rendimentos constantes ou decrescentes à escala, o que se verifica nas DMU16 (constante) e na DMU28 (decrescente). Além disso, segundo o conceito de inviabilidade (*infeasibility*) no âmbito dos modelos de supereficiência, tal representa que estas DMU manter-se-ão eficientes para qualquer aumento de

inputs. Estes casos estão caracterizados com o símbolo +∞ para representar o mais alto nível de eficiência.

Dado que a DMU em estudo é retirada do conjunto das unidades de comparação, o nível de supereficiência obtido atinge valores superiores a 1 (100%), permitindo o desempate das DMU consideradas eficientes. A DMU20 apresenta o nível de supereficiência (quantificado) mais elevado.

Este modelo tem como principais vantagens o facto de permitir uma discriminação entre as DMU eficientes, sem alterar o nível de eficiência e o *ranking* das ineficientes, uma vez que a exclusão destas (ineficientes) não altera a fronteira de eficiência. Note-se no quadro seguinte que existe uma discriminação entre os índices das DMU consideradas eficientes no modelo geral, mas os índices das DMU ineficientes mantêm-se idênticos.

Quadro 1. Índices de eficiência e supereficiência do Modelo BCC

DMU	Score	Superscore
DMU16	**1,000**	**+∞**
DMU28	**1,000**	**+∞**
DMU20	**1,000**	**8,173**
DMU3	**1,000**	**2,051**
DMU8	**1,000**	**1,066**
DMU21	**1,000**	**1,059**
DMU24	**1,000**	**1,032**
DMU29	0,990	0,990
DMU14	0,944	0,944
DMU19	0,923	0,923
DMU35	0,872	0,872
(…)	**(…)**	**(…)**
DMU5	0,087	0,087

Fonte: Elaborado pela autora de acordo com os resultados obtidos do DEASolver

CASO PRÁTICO 4. MODELO CONTEXTO-DEPENDENTE

Com base nos dados constantes no ficheiro Excel dos casos práticos anteriores (Caso Prático 2 e 3.xlsx), foram estimados os modelos contexto-dependente DEA BCC (orientado a *input*), a partir do *software* DEAFrontier, a fim de complementar os resultados obtidos nos modelos anteriores. Os resultados são apresentados no ficheiro Excel Caso Prático 4.xlsx, disponibilizado em anexo a este manual.

Uma análise de tipo contexto-dependente permite complementar este tipo de estudos, dado que avalia o grau de atratividade ou de progresso de uma determinada DMU relativamente às DMU que lhe são mais similares, sendo as mesmas avaliadas dentro de um determinado contexto.

Apresenta-se no quadro 1 os indicadores de atratividade e progresso, nos vários níveis, obtidos pelo *software* DEAFrontier.

Foram obtidos 5 níveis, que correspondem a 5 fronteiras de eficiência. Todos os indicadores constantes no quadro anterior foram calculados relativamente ao nível imediatamente posterior ou anterior.

Quadro 1. Atratividade/Progresso contexto-dependente do Modelo BCC

Atratividade		Progresso							
Nível 1		Nível 2		Nível 3		Nível 4		Nível 5	
DMU16	+∞	DMU29	0,990	DMU22	0,944	DMU17	0,988	DMU34	0,954
DMU28	+∞	DMU14	0,944	DMU2	0,844	DMU31	0,958	DMU18	0,931
DMU20	8,173	DMU19	0,923	DMU9	0,787	DMU10	0,920	DMU37	0,692
DMU24	2,808	DMU35	0,872	DMU23	0,777	DMU4	0,892	DMU5	0,325
DMU3	2,080	DMU27	0,866	DMU25	0,744	DMU32	0,834		
DMU8	1,407	DMU12	0,803	DMU6	0,705	DMU26	0,614		
DMU21	1,270	DMU1	0,791	DMU7	0,631				
		DMU33	0,695	DMU11	0,594				
		DMU30	0,675	DMU36	0,397				
		DMU13	0,443						
		DMU15	0,439						

Fonte: Elaborado pela autora de acordo com os resultados obtidos do DEAFrontier

Desta forma, os indicadores de eficiência constantes no nível 1 correspondem ao grau de atratividade das DMU consideradas eficientes na fronteira clássica (nível 1) relativamente às DMU que compõem a fronteira de eficiência de nível 2. Note-se que os valores obtidos são similares aos indicadores de supereficiência.

A partir do nível 2 os indicadores refletem o progresso necessário a cada DMU a fim de atingir a fronteira de eficiência das DMU que lhes servem de referência. Note-se por exemplo, que os indicadores de eficiência do nível 2 correspondem aos valores obtidos no modelo clássico, pois reflete o esforço necessário às DMU consideradas ineficientes no nível 1, para aumentar a sua eficiência relativamente à fronteira de boas práticas.

Por exemplo, a DMU9 apresenta um nível de eficiência de 43,5% no modelo clássico (nível 1). Ao excluir as DMU consideradas eficientes no nível 1, o seu nível de eficiência aumenta para 78,7% no nível 3, ou seja, relativamente à fronteira constituída pelas DMU considerados eficientes no nível 2, nomeadamente: DMU29, DMU14, DMU19, etc.

As DMU consideradas menos atrativas em termos de eficiência e que se encontram no último nível contexto-dependente são a DMU5, DMU37, DMU18 e DMU34.

A DMU5 que apresenta um nível de eficiência de apenas 8,7% no modelo clássico (nível 1), apresenta um nível de eficiência de 32,5% no nível 5, ou seja, relativamente à fronteira constituída pelas DMU consideradas eficientes no nível 4, nomeadamente: DMU17, DMU31, DMU10, etc. Os valores-objetivo definidos para a DMU5 a nível da fronteira clássica, a fim de alcançar a fronteira de eficiência, serão certamente muito difíceis de concretizar na prática (variações necessárias na ordem dos 95%).

Este modelo permite a definição de objetivos faseada, de forma que a DMU5 por exemplo possa, progressivamente, melhorar o seu nível de eficiência, passando primeiramente para uma fronteira de nível 4, por via da definição de objetivos mais realistas, tomando por referência a *performance* da DMU4 (*peer group*).

Apresenta-se no quadro 2 apenas os indicadores de atratividade. Neste caso, os indicadores de eficiência constantes no nível 1 correspondem ao grau de atratividade das DMU consideradas eficientes na fronteira clássica (nível 1) relativamente às DMU que compõem a fronteira de eficiência de nível 2, tal como descrito anteriormente (e como tal os valores obtidos são similares aos indicadores de supereficiência); os indicadores de eficiência constantes no nível 2 correspondem ao grau de atratividade das DMU consideradas eficientes na fronteira de nível 2 relativamente às DMU que compõem a fronteira de eficiência de nível 3; os indicadores de eficiência constantes no nível 3 correspondem ao grau de

atratividade das DMU consideradas eficientes na fronteira de nível 3 relativamente às DMU que compõem a fronteira de eficiência de nível 4; etc. Desta forma, os indicadores de atratividade correspondem aos indicadores de supereficiência respetivos a cada fronteira ou nível.

O nível 5 não apresenta quaisquer valores dado que os mesmos teriam de ser estimados relativamente às DMU a compor uma fronteira de eficiência de nível 6, que não existe.

Quadro 2. Atratividade contexto-dependente do Modelo BCC

Atratividade									
Nível 1		Nível 2		Nível 3		Nível 4		Nível 5	
DMU16	+∞	DMU12	+∞	DMU6	+∞	DMU4	+∞	-	-
DMU28	+∞	DMU14	+∞	DMU22	+∞	DMU10	+∞	-	-
DMU20	8,173	DMU15	12,187	DMU25	+∞	DMU17	+∞	-	-
DMU24	2,808	DMU29	3,991	DMU36	+∞	DMU26	+∞	-	-
DMU3	2,080	DMU19	2,853	DMU7	2,411	DMU31	+∞		
DMU8	1,407	DMU30	2,153	DMU2	2,353	DMU32	+∞		
DMU21	1,270	DMU1	2,151	DMU23	2,270				
		DMU13	2,000	DMU11	1,498				
		DMU33	1,884	DMU9	1,457				
		DMU27	1,724						
		DMU35	1,617						

Fonte: Elaborado pela autora de acordo com os resultados obtidos do DEAFrontier

CASO PRÁTICO 5. MODELO IDEA (INVERTIDO) E COMPOSTO

Com base nos dados constantes no ficheiro Excel Caso Prático 5.xlsx disponibilizado em anexo a este manual, foram estimados modelos DEA BCC geral, invertido e composto (orientados a *ouput*), a partir do *software* SIAD, a fim de maximizar os resultados (*outputs*) obtidos pelas DMU a partir dos recursos utilizados (*inputs*).

As 32 DMU em estudo pertencem ao setor das tecnologias da informação e comunicação (TIC). Os modelos DEA incorporam 2 variáveis *input* (gastos de

estrutura e investimento em I&D) e 2 variáveis *output* (vendas de produtos e prestação de serviços). Apresenta-se seguidamente alguns dos principais resultados obtidos pela estimação dos modelos e respetivas análises.

Tendo em consideração certas características matemáticas do modelo BCC, que permitem a existência de DMU falso-eficientes ou eficientes por defeito, o contexto em que algumas DMU atingiram a classificação de eficiência foi analisada.

Diversos indicadores alternativos revelam, em todos os modelos, a existência de algumas DMU falsas-eficientes, dado que as mesmas também registam o nível máximo de eficiência na fronteira DEA invertida e níveis de eficiência composta muito baixos.

O modelo BCC tradicional (ou padrão) apresenta 14 DMU eficientes e um nível de eficiência média de cerca de 88%. Como o modelo é orientado a *output*, pode-se concluir que, em média, as DMU poderiam produzir mais 13,6% de resultados com o mesmo nível de recursos[15].

O modelo de eficiência composta apresenta uma eficiência média de 63,4%, onde apenas a DMU28 regista o nível de eficiência máxima (100%) e a DMU25 o menor nível de eficiência (32,1%).

De entre as DMU eficientes na fronteira padrão, a DMU28 é a única que obtém a máxima eficiência no índice composto, demonstrando um bom desempenho nas áreas onde é melhor (elevada eficiência padrão) e um desempenho aceitável em áreas onde é pior (baixa eficiência invertida). Também a DMU26 (87,3%) e a DMU13 (80,1%) registam níveis elevados de eficiência composta.

O contexto em que as DMU3, DMU1 ou a DMU24 atingiram o nível de eficiência máxima no modelo BCC padrão foi analisado, dado que a DMU3 apresenta o valor mais baixo da amostra para a variável GE, a DMU1 apresenta o valor mais baixo para a variável ID e a DMU24 apresenta o valor mais elevado para as variáveis *output* (V e PS).

A análise dos vários indicadores adicionais revela que o nível de eficiência padrão obtido pela DMU24 e DMU1 podem constituir falsas eficiências, dado que estas DMU também registam o nível máximo de ineficiência na fronteira invertida e um nível de eficiência composta baixo (60,97%).

Também as DMU10, DMU17 e DMU27 parecem constituir falsas eficientes dado que obtêm eficiência máxima na fronteira padrão e na invertida.

---

[15] Como o modelo é orientado a *output* o cálculo do potencial melhoramento dos *outputs* é calculado através do inverso do *score* de eficiência, ou seja: $\left(\frac{1}{0,88}-1\right)\times 100 = 13,6\%$

A fronteira invertida ou ineficiente é composta pelas 11 DMU com as piores práticas da amostra. Para além daquelas já identificadas (DMU1, DMU10, DMU17, DMU24 e DMU27) as DMU11, DMU14, DMU18, DMU20, DMU23 e DMU25 também pertencem a esta fronteira (ver quadro 1).

Quadro 1. Níveis de eficiência

DMU	Modelo BCC		
	DEA Padrão	DEA Invertido	DEA Composto
DMU1	**1,0000**	**1,0000**	0,6097
DMU3	**1,0000**	0,8100	0,7256
DMU4	**1,0000**	0,8737	0,6868
DMU9	**1,0000**	0,9584	0,6351
DMU10	**1,0000**	**1,0000**	0,6097
DMU11	0,7719	**1,0000**	0,4707
DMU12	**1,0000**	0,9682	0,6291
DMU13	**1,0000**	0,6859	0,8013
DMU14	0,9525	**1,0000**	0,5808
DMU17	**1,0000**	**1,0000**	0,6097
DMU18	0,6653	**1,0000**	0,4056
DMU20	0,7561	**1,0000**	0,4611
DMU21	**1,0000**	0,7011	0,7920
DMU22	**1,0000**	0,7226	0,7789
DMU23	0,8858	**1,0000**	0,5401
DMU24	**1,0000**	**1,0000**	0,6097
DMU25	0,5262	**1,0000**	0,3209
DMU26	**1,0000**	0,5683	0,8730
DMU27	**1,0000**	**1,0000**	0,6097
DMU28	**1,0000**	0,3600	**1,0000**
(...)	(...)	(...)	(...)

Fonte: Elaborado pela autora de acordo com os resultados obtidos do SIAD

CASO PRÁTICO 6. MODELO BIETÁPICO

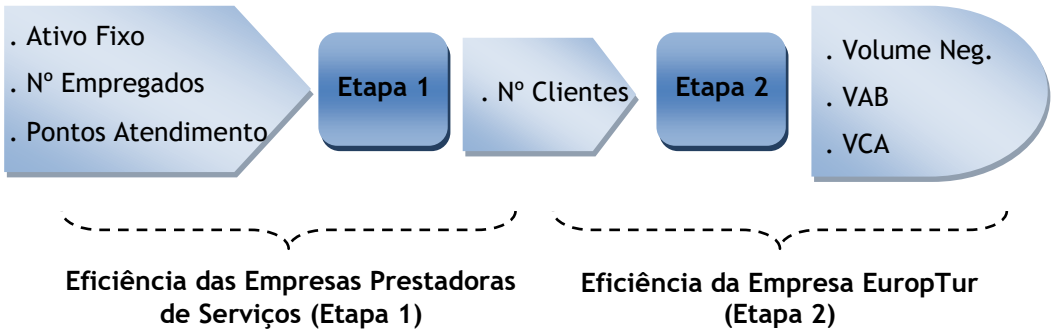
Com base nos dados constantes no ficheiro Excel Caso Prático 6.xlsx disponibilizado em anexo a este manual, foi estimado o modelo DEA BCC Bietápico, a partir do *software* DEAFrontier. Este modelo considera a existência de uma medida intermediária comum entre duas etapas, em que o modelo da etapa 1 é orientado a *input* (minimizar recursos) e a etapa 2 é orientado a *output* (maximizar resultados).

As DMU em estudo constituem 26 empresas fornecedoras da Empresa EuropTur que se dedica à prestação de serviços turísticos para a Europa, e que tem como objetivo ser uma referência inovadora ao nível da informação e reservas *online* de atividades turísticas de lazer.

Considera-se que a eficiência da Empresa EuropTur na produção de resultados (etapa 2) está fortemente condicionada pela eficiência das empresas fornecedoras de serviços aos seus clientes (etapa 1).

Neste contexto, considerou-se o seguinte modelo bietápico para a avaliação da eficiência global:

Figura 1. Modelo bietápico



Fonte: Elaborado pela autora

O modelo bietápico é estimado partindo do pressuposto que a (in)eficiência da etapa 1 influencia a (in)eficiência da etapa 2 devido à existência de uma medida intermediária comum: os clientes atendidos.

Desta forma considere-se as seguintes variáveis *input* da etapa 1: o total do Ativo Fixo afeto à atividade (AF), o número de empregados (NEMP) e o número de postos de atendimento (NPA). O *output* da etapa 1 (número de clientes atendidos - CL) constitui simultaneamente o *input* da etapa 2, que irá permitir à Empresa EuropTur

gerar volume de negócios (VN), valor acrescentado bruto (VAB) e valor criado para os seus acionistas (VCA).

Apresenta-se seguidamente alguns dos principais resultados obtidos pela estimação do modelo e respetivas análises.

Quadro 1. Níveis de eficiência bietápica

DMU	Eficiência Etapa 1	Eficiência Etapa 2	Eficiência Global	CL Ótimo
DMU1	1,00000	0,00969	0,50485	222
DMU2	1,00000	0,12219	0,56109	882
DMU3	1,00000	0,08795	0,54398	1.517
DMU4	1,00000	0,47568	0,73784	11.210
DMU5	1,00000	0,18786	0,59393	914
DMU6	1,00000	0,12327	0,56163	3.863
DMU7	**1,00000**	**1,00000**	**1,00000**	3.792
DMU8	1,00000	0,04288	0,52144	65
DMU9	0,27205	0,75504	0,51354	3.663
DMU10	0,71120	1,00000	0,85560	45.609
DMU11	0,67130	1,00000	0,83565	30.819
DMU12	1,00000	0,63485	0,81743	3.529
DMU13	1,00000	0,22720	0,61360	2.353
DMU14	1,00000	0,06656	0,53328	3.529
DMU15	1,00000	0,76125	0,88062	23.241
DMU16	1,00000	0,66808	0,83404	20.410
DMU17	0,26797	1,00000	0,63398	105
DMU18	1,00000	0,36703	0,68351	13.561
DMU19	**1,00000**	**1,00000**	**1,00000**	67.680
DMU20	1,00000	0,24580	0,62290	4.500
DMU21	1,00000	0,65042	0,82521	740
DMU22	1,00000	0,26824	0,63412	4.981

DMU	Eficiência Etapa 1	Eficiência Etapa 2	Eficiência Global	CL Ótimo
DMU23	1,00000	0,15899	0,57950	42
DMU24	0,23022	0,99083	0,61052	42
DMU25	1,00000	0,62915	0,81458	12.555
DMU26	1,00000	0,44988	0,72494	8.515
Média	**0,89049**	**0,49703**	**0,69376**	**-**

Fonte: Elaborado pela autora de acordo com os resultados obtidos do DEAFrontier

A etapa 1, que avalia a eficiência das empresas prestadoras de serviços, apresenta uma eficiência média de 89% e regista 21 DMU eficientes, das quais 19 não promovem eficiência máxima na etapa 2.

Por outro lado, a etapa 2, que avalia a eficiência da Empresa EuropTur, apresenta 49,7% de eficiência média e regista apenas 5 DMU eficientes, das quais 3 não registaram eficiência máxima na etapa 1. Ou seja, apenas 2 DMU (a DMU7 e DMU19) promovem eficiência máxima nas duas etapas, obtendo um índice de eficiência global igual a 1.

Sendo a etapa 2 orientada a *output* (maximização de resultados) o índice de eficiência produzido pelo *software* DEAFrontier é apresentado com base no potencial melhoramento dos *outputs*. Para apurar o valor do índice de eficiência tradicional é necessário calcular o respetivo valor inverso, ou seja:

$$\text{Índice Eficiência Tradicional} = \left(\frac{1}{\text{índice de eficiência DEAFrontier}} \right)$$

O índice de eficiência global ainda não é apresentado automaticamente pelo DEAFrontier. O mesmo pode ser calculado com base numa soma ponderada das eficiências das etapas individuais. Considerou-se neste caso prático 50% para cada etapa, mas o analista poderá atribuir pesos diferentes às diferentes etapas, de acordo com o seu grau de importância ou de envolvimento operacional.

Desta forma, na folha "Efficiency2" foi criada uma coluna adicional para o cálculo do índice de eficiência tradicional e outra coluna com o índice de eficiência global, de acordo com a seguinte fórmula:

$$\text{Índice Eficiência Global} = \left(\text{índice eficiência etapa } 1 \times 0{,}5\right) + \left(\text{índice eficiência etapa } 2 \times 0{,}5\right)$$

O modelo bietápico permite ainda o apuramento dos valores ótimos para a variável intermediária, de forma a atingir a eficiência em ambas as etapas.

A DMU16, por exemplo, regista 18.262 clientes atendidos (CL) e uma eficiência global de 83,4%. De acordo com os resultados obtidos pela estimação do modelo, o nível ótimo para esta variável, de forma a promover eficiência máxima nas duas etapas (e desta forma uma eficiência global de 100%), é de 20.410. Ou seja, teria de se aumentar em 2.148 o número de clientes atendidos, o que representa um aumento de 11,8% face aos atuais.

Contudo, a DMU3 que regista uma eficiência global de 54,4% e 109 clientes atendidos, regista um valor ótimo de 1.517. O aumento necessário será certamente impossível ou muito difícil de alcançar.

Por outro lado são várias as DMU que registam níveis ótimos para a variável intermediária idênticos ou muito semelhantes aos atuais, mas que registam valores muito baixos de eficiência global (DMU1, DMU8, DMU14, DMU17, etc.). Nestes casos, se já se encontram no nível ótimo de clientes atendidos, a baixa eficiência deve ser avaliada por via de processos internos de funcionamento, o que irá exigir análises e estudos complementares extra DEA.

APLICAÇÕES PRÁTICAS AVANÇADAS DOS MODELOS DEA

Os casos práticos apresentados anteriormente constituem aplicações simples dos vários modelos DEA. Contudo têm surgido, nos anos mais recentes, diversas aplicações mais complexas dos modelos DEA, que cruzam e interligam diversos conceitos ou modelos e teorias financeiras. Estas aplicações constituem, numa grande maioria dos casos, investigações desenvolvidas nas Universidades, no âmbito de dissertações e teses de mestrado ou doutoramento, envolvendo empresas ou organizações reais. Apresenta-se seguidamente alguns exemplos de aplicações mais avançadas dos modelos DEA, desenvolvidos neste contexto.

Interligação de modelos (DEA, Matrizes, Regressões, BSC):

Martins (2013) interliga diversos modelos DEA a fim de avaliar diversos indicadores de eficiência dos principais bancos a operar em Portugal. As principais contribuições deste estudo consistem (1) na incorporação de novas variáveis nos modelos DEA, que refletem, para além da rendibilidade, a criação de valor e o custo de oportunidade do capital; (2) na exploração de indicadores e modelos complementares de eficiência mais exigentes que os tradicionais e (3) na aplicação de regressões fracionais aos índices DEA complementares.

O ano de 2009 marca uma significativa reviravolta no setor bancário, que passou a lidar com uma das maiores crises financeiras das últimas décadas. A maioria dos

bancos (62,5%) destruiu valor para os seus acionistas em 2009, apresentando valores negativos para a variável de referência à criação de valor (*Economic Value Added* – EVA).

Contudo, em termos gerais, os resultados das análises efetuadas aos níveis de eficiência dos principais bancos a operar em Portugal para os anos de 2007 e 2009 são muito similares. Para os modelos DEA tradicionais de eficiência padrão, o teste de Friedman demonstra que os níveis de eficiência obtidos pelos diversos modelos são considerados estatisticamente diferentes, com o modelo de rendibilidade apresentando os níveis de eficiência média mais elevados e o modelo de intermediação os mais baixos.

Verifica-se que quando a amostra principal é dividida em grupos menores e mais homogéneos, na maioria dos casos, a eficiência média e a eficiência mínima aumentam e o desvio-padrão da eficiência diminui. De facto, diversos bancos apresentam um nível mais elevado de eficiência quando analisados num contexto de grupos mais homogéneos.

Regista-se um elevado número de bancos com rendimentos variáveis à escala, em todos os modelos analisados, o que justifica, em parte, a escolha do modelo DEA BCC. A maioria dos bancos de maior dimensão apresenta rendimentos decrescentes à escala, enquanto a maioria dos bancos de pequena dimensão apresenta rendimentos crescentes à escala. Estes resultados são consistentes com diversos outros estudos que concluem que é possível registar ganhos de eficiência até uma determinada dimensão, mas para dimensões excessivamente elevadas a eficiência é menor. (Canhoto, 1996) (Seiford e Zhu, 1999b) (Martins, 2009; 2010).

Diversos modelos registam a existência de bancos tecnologicamente eficientes que não operam na mais eficiente escala de produção, atingindo valores muito baixos de eficiência geral. A média da eficiência técnica pura é geralmente superior à eficiência global, revelando a existência de ineficiências de escala em muitos bancos. As operações de F&A poderiam potenciar o aumento de eficiência nestes casos.

Por outro lado, existem muitos bancos com elevadas eficiências de escala mas com elevadas ineficiências na gestão dos seus recursos. Os níveis de eficiência não-radial são também, em média, muito baixos, revelando a existência de elevadas folgas nos recursos. Em termos gerais, conclui-se que a maioria dos bancos apresenta baixos níveis de eficiência, o que reflete a necessidade de implementar esforços no sentido de melhorar a gestão dos seus recursos.

Parece existir evidência de que os bancos são reconhecidos pelos seus pares de acordo com certas competências.

Quando comparados os níveis de eficiência entre grupos mais homogéneos, parece existir evidência que o fator dimensão/negócio influencia as etapas de produção e de intermediação e o fator risco não influencia nenhuma delas.

Comparando os resultados obtidos dos modelos DEA tradicionais com os resultados do modelo bietápico, confirmam-se as conclusões registadas noutros estudos (tais como, Chen e Zhu (2004), Kao e Hwang (2008) e Chen *et al*. (2009a; 2009b; 2009c)), em que se classificam como bancos globalmente eficientes, bancos ineficientes em um, ou em ambos os modelos que compõem cada etapa do modelo bietápico. Este facto reflete a incapacidade dos modelos DEA tradicionais na avaliação da eficiência na presença de processos tipicamente bietápicos, e consequentemente interdependentes, caracterizados pela existência de uma medida intermediária. Parece existir evidência que a utilização de modelos bietápicos, ou seja, considerar a existência da variável intermediária Depósitos, comum aos dois modelos, influencia a determinação dos níveis de eficiência.

Tendo em consideração certas características matemáticas do modelo BCC, que permitem a existência de DMU falso-eficientes ou eficientes por defeito, como sustentado por Ali (1993), o contexto em que alguns bancos atingiram a classificação de eficiência foi analisada. Diversos indicadores alternativos revelam, em todos os modelos, a existência de alguns bancos falso-eficientes, dado que os mesmos também registam o nível máximo de eficiência na fronteira DEA invertida e níveis de eficiência composta muito baixos.

O denominado modelo DEA bietápico global calcula o nível de eficiência média global, ponderando os níveis de eficiência obtidos nas etapas de produção e de intermediação. Este modelo regista uma menor dispersão dos níveis de eficiência. É de referir que o índice de eficiência bietápica global ainda não está incorporado no único *software* DEA (DEAFrontier) que integra o modelo bietápico.

Parece existir alguma evidência que a utilização dos níveis de eficiência composta caracteriza maior exigência em termos de *performance*, dado que o teste de Wilcoxon comprova que, na grande maioria dos casos, em todos os modelos, para a fronteira global ou fronteira por grupos, os níveis de eficiência composta apresentam níveis de eficiência mais baixos que os modelos DEA tradicionais (eficiência padrão).

Também as análises em matriz comprovam que o posicionamento dos bancos nos quadrantes de eficiência cruzada é bastante mais exigente, sendo os bancos recolocados em quadrantes de eficiência mais moderada nas matrizes de eficiências compostas.

Aplicando o conceito da tradicional Matriz da *Boston Consulting Group* (Matriz BCG) aos resultados obtidos pelos diversos modelos DEA, observa-se que muitos bancos mudam de quadrante estratégico quando analisados através de modelos

tradicionais ou bietápicos. São muito poucos os bancos que registam resultados consistentes em todas as abordagens e sem sombra de dúvida sobre a sua classificação real de eficiência.

Para a abordagem bietápica em termos de produção vs intermediação foi criada uma adaptação à Matriz BCG, apresentada pela primeira vez em Martins (2009). Considerando que a matriz BCG parte do princípio que um dos objetivos essenciais de uma estratégia é otimizar a distribuição dos recursos de que a empresa dispõe, para maximizar a sua posição concorrencial, facilmente se ajusta a matriz BCG ao estudo da eficiência se se associar às variáveis estratégicas da matriz (quota de mercado relativa e taxa de crescimento) duas variáveis de gestão, nomeadamente: a rendibilidade e o investimento. A rendibilidade, normalmente associada na matriz BCG à quota de mercado relativa, uma vez que reflete o nível de recursos libertados, é associada aos *outputs* dos modelos de eficiência. O investimento, normalmente associado na matriz BCG à taxa de crescimento, uma vez que esta reflete as necessidades de liquidez, é associado aos *inputs*. As variáveis estratégicas da matriz BCG correspondem aos níveis de eficiência obtidos no modelo de produção (etapa 1) e no modelo de intermediação (etapa 2). Cada um deles é dividido em dois quadrantes: eficiente vs. ineficiente. Cruzando as variáveis estratégicas obtém-se quatro quadrantes que representam a posição do banco e qual a estratégia necessária para melhorar a sua eficiência geral.

Aquando da aplicação das diversas regressões econométricas, a fim de identificar os fatores determinantes da eficiência dos bancos em estudo, verificou-se que, relativamente à eficiência bietápica global, os modelos de regressão fracional e Tobit mostram evidências de melhor especificação relativamente ao modelo linear. Os modelos restritos de regressão para proporções Logit, Probit e Loglog são modelos apropriados para estimar a eficiência bietápica global. O modelo Tobit também não evidencia má especificação. Todos os modelos mostram evidências de má especificação para estimar a eficiência composta de rendibilidade.

As variáveis que parecem exercer maior influência sobre os níveis de eficiência bietápica global são as variáveis internacionalização, dimensão e tipo de propriedade do capital.

Parece existir evidência que os bancos de maior dimensão e maior percentagem de representações internacionais de balcões apresentam maiores níveis de eficiência bietápica global. A maior dispersão de balcões parece favorecer uma maior facilidade na captação de recursos junto dos clientes, estando os bancos portugueses a beneficiar das vantagens competitivas normalmente apontadas à internacionalização.

O efeito negativo da variável que representa o tipo de propriedade do capital e os níveis de eficiência foi, de alguma forma, inesperada, dado que existe uma ideia

formada de que os bancos cotados serão, necessariamente, mais eficientes devido à maior exposição pública dos seus indicadores de mercado, o que poderá exercer uma maior pressão sobre os gestores bancários para uma gestão mais controlada em termos de indicadores de produtividade e eficiência. Estes resultados poderão refletir alguma entropia na eficiência causada pelos bancos de menor dimensão pertencentes ao mesmo grupo económico, especializados em determinados segmentos de negócio.

As variáveis que parecem exercer maior influência sobre os níveis de eficiência composta de rendibilidade são as variáveis *cost-to-income*, número de empregados por balcão e rendibilidade do ativo. A variável dimensão também se revela significativa em alguns modelos.

O facto de algumas instituições manterem uma rede de distribuição constituída por numerosos balcões de atendimento e um elevado número de funcionários por balcão, promove um nível de gastos operacionais mais elevados. Nestas instituições, se o volume de vendas por balcão não compensar os respetivos gastos, serão esperados valores mais elevados para os rácios CTI e menores níveis de eficiência.

Será eventualmente o ganho de eficiência obtido por via da utilização das TIC que justifica a significativa relação positiva registada relativamente à variável de rendibilidade do ativo, que determina uma elevada eficiência composta de rendibilidade por parte dos bancos mais rentáveis em termos económicos. Contudo, o facto de não ter sido possível a integração de variáveis associadas às TIC nos modelos, não permite a confirmação desta suposição.

Aquando da aplicação das diversas regressões econométricas, a fim de avaliar as relações entre os indicadores de rendibilidade, risco e eficiência, considerando o rácio TIER1 como variável dependente, verificou-se que os modelos de regressão fracional e Tobit mostram evidências de melhor especificação relativamente ao modelo linear.

Novamente, o efeito das variáveis explicativas é similar em todos os modelos para todas as variáveis. As variáveis rendibilidade do ativo e solvabilidade apresentam uma relação positiva com o rácio TIER1 e as variáveis rendibilidade financeira e níveis de eficiência composta de rendibilidade e bietápica global uma relação negativa.

Os resultados relativos aos indicadores de risco apenas confirmam o que seria esperado dada a teoria financeira geral: o efeito positivo da solvabilidade sobre a TIER1, que constitui ele próprio um indicador de solvabilidade bancária e o efeito negativo da variável risco, dado que bancos com menor TIER1 se caracterizam como bancos de maior risco. Foi inesperado o facto de esta variável não ter poder explicativo significativo.

Os resultados relativos aos indicadores de rendibilidade também são consistentes com a teoria financeira sobre o efeito de alavancagem. Verifica-se uma influência positiva da rendibilidade do ativo sobre a solvabilidade e uma influência negativa da rendibilidade financeira. Uma maior exigência de capitais ou fundos próprios, com vista a reforçar o rácio TIER1 por parte dos acionistas promove uma redução da rendibilidade dos capitais próprios, dado que o mesmo nível de resultados é diluído por um maior nível de capital próprio. Por outro lado, o rácio TIER1 é o rácio bancário que, em termos conceptuais, mais se assemelha à noção de autonomia financeira aplicada em contexto empresarial. De acordo com a teoria financeira geral, aumentos na autonomia financeira promovem reduções na rendibilidade dos capitais próprios por via do efeito financeiro de alavanca.

Os resultados relativos aos indicadores de eficiência apresentam uma relação negativa com a TIER1. Tal facto reflete que para maiores níveis de eficiência se espere menores níveis de solvabilidade.

Em resumo: os principais resultados revelam que o modelo de rendibilidade apresenta os níveis de eficiência média padrão mais elevados e o modelo de intermediação os mais baixos. Registam-se muitas ineficiências de escala e de gestão de recursos na maioria dos bancos. A aplicação de modelos bietápicos permitiu contornar a habitual problemática inerente à coexistência das abordagens de produção e intermediação. A aplicação de modelos de eficiência composta permitiu a identificação dos bancos falso-eficientes nos modelos de eficiência padrão. A aplicação de regressões para proporções, mais apropriadas que as tradicionais regressões lineares ou que o modelo Tobit, para lidar com a natureza fracionaria dos índices DEA, permitiu a identificação dos fatores determinantes da eficiência dos principais bancos a operar em Portugal. Os modelos de regressão fracional mostram evidências de melhor especificação relativamente aos modelos de regressão tradicionais. As variáveis que parecem exercer maior influência sobre os níveis de eficiência bietápica global são as variáveis internacionalização, dimensão e tipo de propriedade do capital e sobre os níveis de eficiência composta de rendibilidade são as variáveis *cost-to-income*, número de empregados por balcão e rendibilidade do ativo.

Carvalho (2011) desenhou um *framework* que combina o DEA e o *Balanced Scorecard* (BSC) para avaliar e gerir o desempenho do negócio *Business-to-Business* (B2B) da banca comercial e analisar o impacto percecionado deste *framework* no caso de um banco português.

O estudo de Carvalho (2011) tem como objetivo central testar a robustez da técnica DEA, apoiada em medidas provenientes das diversas perspetivas do BSC, para desenvolver um sistema de avaliação de desempenho (SAD) com a finalidade de avaliar e melhorar o desempenho dos gabinetes de empresas de um banco português. Como objetivos complementares o estudo pretende retirar benefícios

da combinação da técnica DEA com o modelo BSC; assegurar que o SAD é equilibrado (com medidas financeiras e não financeiras), simples e compatível com a estratégia e a cultura do banco; reduzir o número de medidas a um conjunto restrito e consistente; desenvolver modelos para avaliar o desempenho na ótica de dois grupos diferentes de interessados (os gestores de topo, em representação dos acionistas, e os empregados); e sobrepor a gestão do desempenho ao sistema de avaliação (Carvalho, 2011: 161).

Os resultados gerados pelo modelo integrado DEA e BSC foram escrutinados por um comité de gestores e responsáveis dos Gabinetes de Empresas do banco em estudo, segundo três vertentes: perspetiva longitudinal, confronto de óticas dos dois grupos de interessados e comparação do modelo criado que integra o DEA e o BSC com o modelo já existente no banco.

Carvalho (2011: 163) conclui que é preferível a aplicação segundo uma série trienal ao invés do exercício isolado, que os modelos de avaliação das duas óticas de interessados são semelhantes e que é necessário reformular o modelo existente no banco promovendo a eficiência, favorecendo a Perspetiva Financeira do BSC e relacionando o Valor da Retribuição Variável com as médias móveis trienais da eficiência e da eficácia.

Carvalho (2011: 163) verificou ainda que a contabilização do crédito malparado comprometeu o desempenho da Perspetiva Financeira no ano de 2009 e colocou em crise o nexo de causalidade do BSC, que havia sido confirmado no biénio 2007-2008. Além disso, demonstrou também que a construção de quatro submodelos DEA poderia permitir análises dos resultados dos gabinetes de empresas por perspetiva de acordo com o BSC, o que facilitaria a identificação de referências de aprendizagem para cada uma delas.

Interligação de conceitos (Eficiência, Eficácia, Produtividade):

Encarnação (2012) aborda o uso dos modelos DEA para avaliar e melhorar o desempenho no setor bancário, consistindo a dissertação num estudo de caso aplicado a um dos maiores bancos portugueses – o Banco Espírito Santo (BES). O objetivo principal do estudo consistiu em avaliar a eficiência relativa de 333 agências bancárias que formam um dos dois departamentos comerciais do banco.

Pretendeu-se, numa primeira fase, identificar os balcões de boas práticas e verificar a aplicabilidade das mesmas nos balcões menos eficientes, por forma a contribuir para a melhoria do desempenho global da instituição. Posteriormente compararam-se os indicadores de eficiência obtidos com o desempenho dos balcões no cumprimento dos seus objetivos comerciais. Procurou-se, assim, analisar a eventual existência de correlação entre eficiência e eficácia, ou seja, verificar se

as agências bancárias mais eficientes são também as mais eficazes. Para o efeito foi construído um modelo DEA cujas variáveis *input* agregam os gastos dos balcões e as variáveis *output* os seus principais rendimentos e alguns dos aspetos estratégicos que o banco pretende maximizar. Os resultados obtidos identificam, não só as agências bancárias menos eficientes, como também assinalam aquelas que, sendo semelhantes e eficientes, lhes podem servir de referência para a melhoria do seu desempenho.

Tendo em conta o caráter formativo do estudo e a maior aceitação do mesmo pelos órgãos decisores, procurou-se verificar a exequibilidade das propostas apresentadas. O estudo conclui a existência de uma correlação positiva fraca entre os níveis de eficiência e de eficácia, ainda assim estatisticamente significante. Este tipo de estudos evidencia a utilidade da metodologia DEA enquanto medida complementar de outras técnicas de controlo de gestão, em particular nas organizações que adotam a gestão por objetivos.

Para o desenvolvimento da sua atividade comercial, o BES possuía em 2011 uma rede de unidades de negócio composta por 23 Centros *Private Banking*, 25 Centros de Médias Empresas com 130 gestores de conta e duas Equipas com 18 gestores, localizadas em Lisboa e no Porto para acompanhamento de grandes empresas. Possuía ainda 701 balcões, divididos pelo Departamento Comercial Sul e Departamento Comercial Norte, que geriam no seu total cerca de dois milhões de clientes. O presente estudo aborda o primeiro departamento, que por sua vez se divide em 18 subunidades, denominadas por direções regionais e que, no seu total, representam 333 balcões, que no estudo constituem as DMUs ou unidades de negócio (Encarnação, 2012: 43).

Na execução do modelo de negócio, a gestão de topo, ou seja o Conselho de Administração, define os objetivos que o BES precisa de alcançar para cumprir a sua missão e alcançar as metas propostas. Os objetivos são por sua vez negociados e distribuídos, utilizando o método "em cascata", pelos dois departamentos que, por sua vez, os distribuem pelas direções regionais atribuindo-os aos balcões. Para medir o nível de cumprimento dos objetivos, o BES desenvolveu um instrumento de gestão designado por SOI – Sistema de Objetivos e Incentivos. O modelo está construído para avaliar sobretudo a eficácia de cada balcão quanto ao grau de cumprimento de realização dos objetivos nas principais variáveis de negócio, constituindo-se, por conseguinte, como uma importante ferramenta de controlo de gestão. Na medida em que o BES adota um modelo de gestão por objetivos, o SOI pode ainda contribuir para o método de Avaliação e Gestão de Desempenho e representar um papel importante na política de Gestão de Compensações e Benefícios da instituição (Encarnação, 2012: 44).

Dos diversos resultados apresentados no estudo destacam-se, como aplicação mais avançada, os resultados constantes nos quadros comparativos das taxas

médias de eficiência e eficácia por direções regionais, que evidenciam as diferenças de desempenho que se verificam entre as mesmas.

Tendo o autor seguido o proposto na literatura por Ruivo (2011), as 333 DMUs que constituem o universo do estudo foram divididas em quatro grupos:

- Eficientes e eficazes (*score* de eficiência = 100 / *score* de eficácia ≥ 100);
- Eficientes e não eficazes (*score* de eficiência = 100 / *score* de eficácia < 100);
- Não eficientes mas eficazes (*score* de eficiência < 100 / *score* de eficácia ≥ 100);
- Nem eficientes nem eficazes (*score* de eficiência <100 / *score* de eficácia < 100).

Apresenta-se no quadro seguinte o resumo dos resultados obtidos:

Eficiência vs Eficácia				
	CRS		**VRS**	
	Total DMUs	**%**	**Total DMUs**	**%**
Eficientes / Eficazes	23	6,91	49	14,71
Eficientes / Não Eficazes	10	3,00	22	6,61
Não Eficientes / Eficazes	182	54,65	156	46,85
Não Eficientes / Não Eficazes	118	35,44	106	31,83
Total	**333**	**100,00**	**333**	**100,00**

Encarnação (2012) termina o estudo refletindo sobre uma questão colocada frequentemente: na impossibilidade de obter um desempenho ao mesmo tempo eficiente e eficaz como se deseja, como deverá decidir o gestor? Deve optar por operar de forma predominantemente eficiente ou predominantemente eficaz? Para responder a esta questão o autor apresenta ainda a contribuição direta (lucro bruto) de cada DMU e a média de cada um dos grupos.

Martins (2013) apresenta um estudo semelhante aplicado à avaliação do serviço prestado pelo Instituto do Emprego e Formação Profissional I.P. (IEFP) na área do emprego, nomeadamente em relação aos 81 Centros de Emprego existentes em 2011. Este estudo tem como principal objetivo identificar os Centros de Emprego com melhores desempenhos ao nível da prestação de serviços e explorar eventuais *trade-offs* entre as diferentes dimensões de desempenho.

André (2016) avalia a eficiência da recolha de resíduos prestada pelas entidades gestoras, no setor em baixa (retalho) considerando para o efeito informação sobre 101 entidades referente ao ano de 2013. Foi determinada a eficiência relativa de cada entidade gestora no que respeita aos *inputs* consumidos e *outputs* gerados e investigado a existência de evidência de que o contexto onde as unidades operam tem influência no nível de eficiência e se o recurso ao *outsourcing* permite gerar ganhos de eficiência. Foram considerados como *inputs* a capacidade instalada de contentores, capacidade de viaturas de recolha, combustível consumido das

viaturas de recolha e pessoal afeto. Como *output* considerou-se a quantidade de resíduos indiferenciados recolhida. A informação obtida é do domínio público e foi fornecida pela entidade reguladora ERSAR. A aplicação dos modelos CCR e BCC permitiu concluir que existem diferenças significativas entre as entidades que realizam a gestão dos resíduos em meios urbanos e as que fazem essa gestão em meios rurais, apresentando as primeiras uma eficiência mais elevada.

André (2016) concluiu que para as entidades que operam em meio predominantemente urbano, existe um potencial médio de melhoria de eficiência técnica de 12%, da qual 6,5% corresponde a ganhos de escala. Desta forma, se as melhores práticas do setor fossem adotadas, para o nível de resíduos que tem de ser recolhido, as entidades gestoras que operam em meios predominantemente urbanos deveriam estar a utilizar apenas 88% dos recursos atuais, apresentando portanto um potencial médio de redução de recursos de 12%. Um pouco mais de metade da poupança de recursos relaciona-se com a escala, já que se as entidades gestoras operassem à escala ótima, seriam consumidos menos 6,5% dos recursos, para recolher igual quantidade de resíduos. O meio urbano é dominado por entidades a operar em rendimentos decrescentes à escala (62%), ou seja, no caso de se verificar um aumento da quantidade de resíduos a recolher, terá de se proceder a um aumento proporcionalmente maior do valor da capacidade instalada de equipamentos, combustível e recursos humanos.

Verificou-se também que existe um potencial médio de melhoria de eficiência técnica de 17,6%, da qual 10,4% corresponde a ganhos de escala, no caso das entidades gestoras que operam em meio rural. Ou seja, as entidades gestoras que operam em meios predominantemente rurais podem reduzir em 17,6% os recursos consumidos, recolhendo a mesma quantidade de resíduos. Uma parte desta poupança de recursos relaciona-se com a escala, já que se estas entidades operassem à escala ótima seriam consumidos menos 10,4% dos recursos, para recolher igual quantidade de resíduos. Constatou-se também que o meio rural é dominado por entidades a operar ao nível de rendimentos crescentes à escala (69%) e que, para recolher uma dada quantidade de resíduos, torna-se necessário proceder a um aumento menos que proporcionais na capacidade de deposição, combustível consumido, capacidade de viaturas e recursos humanos.

Apesar dos valores de eficiência obtidos para os serviços realizados maioritariamente em regime de *outsourcing* se apresentarem mais elevados comparativamente com a sua execução com recurso maioritário a meios próprios, não foram encontradas diferenças estatisticamente significativas para os dois grupos, pelo que André (2016) conclui que, independentemente da natureza do meio, não existem diferenças significativas entre o valor de eficiência obtido pelas entidades que utilizam maioritariamente meios próprios para a recolha de resíduos indiferenciados e pelas que recorrem maioritariamente ao *outsourcing* para

desenvolver estas atividades. Esta observação poderá ter explicação no facto de estarmos perante uma avaliação da eficiência no plano operacional e, por esse motivo, existirão semelhanças acentuadas entre o consumo de recursos e entre os modelos operacionais considerados (meios internos e *outsourcing*).

Previsão de Falências:

Salvador (2012) utiliza a metodologia DEA no contexto da previsão de falência empresarial dentro do setor da restauração em Portugal. Foi utilizada uma amostra total de 222 empresas do setor da restauração, das quais 33 entraram em situação de falência nos anos de 2010 e 2011. A utilização da metodologia DEA neste contexto de investigação permitiu classificar corretamente um terço das empresas que acabaram por falir no período em estudo. Por outro lado, a mesma metodologia permitiu identificar corretamente 93,3% das empresas não falidas da amostra e concluir ainda que a diferença entre os rácios destes dois grupos de empresas aumenta à medida que o ano de falência se aproxima, algo que demonstra a utilidade prática da aplicação do DEA na previsão de falências.

Contrariamente às análises DEA convencionais, este estudo utiliza uma abordagem oposta à abordagem tradicional, uma vez que o objetivo é avaliar a falência e não a eficiência. A fronteira utilizada constitui então uma fronteira de falência, que contém as DMUs com os piores desempenhos, enquanto as empresas com bons desempenhos se encontram dentro de um conjunto de possibilidade de observações eficientes que é moldado pela fronteira de falência (Salvador, 2012: 19).

A definição matemática do conjunto de possibilidade de falência é a mesma que do conjunto de possibilidade de produção. No entanto, a natureza dos *outputs* na avaliação de falência é oposta à de análise de produção, ou seja, na análise de produção quanto maior o valor dos *outputs* melhor, enquanto que na avaliação de falência quanto menor os *outputs* melhor (Salvador, 2012: 20).

Desta forma, os *outputs* incluídos no estudo envolvem variáveis que permitem aferir sobre as responsabilidades assumidas pelas empresas no decurso da sua atividade, nomeadamente: montante de dívida total, passivo corrente e juros suportados. Por outro lado, os *inputs* captam o investimento total na empresa (ativo total), a parte do investimento realizável no curto-prazo (ativo corrente), a capacidade da empresa para gerar resultados económicos (EBIT e resultado liquido) e ainda indicadores de performance financeira (fluxo de caixa e fundo de maneio).

Neste contexto a metodologia DEA foi aplicada com o intuito de serem calculados os *scores* de falência ao invés dos tradicionais *scores* de eficiência.

A amostra para esta dissertação parte de uma lista de empresas que declararam falência em território nacional no ano de 2010 e 2011, a qual foi adquirida à empresa COFACE. De entre os registos disponíveis nessa lista, são identificados os casos de empresas falidas que pertencem ao setor da restauração, através do seu código SIC (*Standard Industrial Classification*). Tendo por base este procedimento foram selecionadas 33 empresas que declararam falência. Posteriormente recolheu-se a informação contabilística necessária ao desenvolvimento do estudo através da base de dados AMADEUS. De notar que apenas se utilizam dados para os exercícios económicos entre 2006 a 2009, facto que permite evitar o impacto da entrada em vigor do Sistema de Normalização Contabilística (SNC). Paralelamente foi também construída uma amostra de controlo composta por empresas não falidas a operar neste setor de atividade dentro do mesmo período amostral (i.e., entre 2006 e 2009). Em particular, as 189 empresas que fazem parte da amostra de controlo foram selecionadas de forma aleatória de entre todas as empresas disponíveis na base de dados AMADEUS, pertencentes ao setor da restauração, e que não foram declaradas falidas entre 2006 e 2011 (Salvador, 2012: 22).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ali, Agha (1993) Streamlined computation for Data Envelopment Analysis, European Journal of Operational Research, 64, p. 61-67.

Amado, Carla (2004) Exploring the use of DEA for formative evaluation in primary care: an application to England, Universidade do Algarve, Faculdade de Economia, Estudos I, p. 563-596.

André, Filipe (2016) Avaliação do Desempenho das Entidades Gestoras dos Serviços de Resíduos Urbanos em Portugal, Dissertação de Mestrado em Gestão Empresarial, Universidade do Algarve, Faculdade de Economia.

Anjos, Maria (2005) Aplicação da Análise Envoltória de Dados (DEA) no estudo da eficiência económica da indústria têxtil brasileira nos anos 90, Tese apresentada para obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil.

Avkiran, Necmi (1999) An application reference for data envelopment analysis in branch banking: helping the novice researcher, International Journal of Bank Marketing, 17: 5, p. 206-220.

Banker, Rajiv; A. Charnes; W. Cooper (1984) Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis, Management Science, 30: 9, p. 1078-1098.

Benegas, Mauricio (2012) O Uso do Modelo NetWork DEA para Avaliação da Eficiência Técnica do Gasto Público em Ensino Básico no Brasil, Revista EconomiA, 13,3ª, p. 569-601, Setembro-Dezembro.

Berger, Allen; David Humphrey (1997) Efficiency of financial institutions: international survey and directions for future research, European Journal of Operational Research, 98, p. 175-212.

Berger, Allen; William Hunter; Stephen Timme (1993) The efficiency of financial institutions: a review and preview of research past, present, and future, Journal of Banking & Finance, 17, p.221-249.

Butler, Timothy ; W. Johnson (1997) Efficiency evaluation of Michigan Prisions using data envelopment analysis, Criminal Justice Review, 22: 1, p. 1-15.

Canhoto, Ana Maria (1996) Technical efficiency in the Portuguese Banking Sector: a non-parametric approach, Universidade Católica Portuguesa, Working Paper n.º 71.96, março.

Carvalho, Carlos (2011) Simbiose entre DEA e BSC na melhoria do desempenho dos bancos: o Caso dos Gabinetes de Empresas do Banco Alfa, Tese de Doutoramento em Gestão Empresarial Aplicada, Instituto Universitário de Lisboa, ISCTE Business School.

Charnes, A.; W. Cooper; E. Rhodes (1978) Measuring the efficiency of decision making units, European Journal of Operational Research, 2, p. 429-444.

Charnes, A.; W. Cooper; E. Rhodes (1981) Evaluating program and managerial efficiency: an application of Data Envelopment Analysis to program follow through, Management Science, 27: 6, p. 668-697.

Charnes, A.; W. Cooper; R. Thrall (1991), A structure for classifying and characterizing efficiency and inefficiency in DEA, The Journal of Productivity Analysis, 2, p. 197-237.

Chen, Yao e J. Zhu (2004) Measuring Information Technology's indirect impact on firm performance, *Information Technology and Management*, 5: 1-2, p. 9-22.

Chen, Yao, L. Liang e J. Zhu (2009a) Equivalence in two-stage DEA approaches, *European Journal of Operational Research*, 193: 2, p. 600-604.

Chen, Yao, W. Cook e J. Zhu (2009b) Deriving the DEA frontier for two-stage processes, *European Journal of Operational Research*, in press, doi: 10.1016/j.ejor.2009.05012.

Chen, Yao, W. Cook, N. Li e J. Zhu (2009c) Additive efficiency decomposition in two-stage DEA, *European Journal of Operational Research*, 196: 3, p. 1170-1176.

Clark, Jeffrey; Thomas Siems (2002) X-Efficiency in banking: looking beyond the Balance Sheet, Journal of Money, Credit, and Banking, 34: 4, p. 987-1013.

Cooper, William; Lawrence Seiford; Joe Zhu (2004) Data Envelopment Analysis: History, Models and Interpretations, in Handbook on Data Envelopment Analysis, Ed. W.W. Cooper, L.M. Seiford and J. Zhu, Chapter 1, p. 1-39, Kluwer Academic Publishers, Boston.

Cooper, William; Lawrence Seiford; Kaoru Tone (2007) Data Envelopment Analysis – A comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver software, 2nd Edition, Springer.

Encarnação, Luís (2012) O Uso do Data Envelopment Analysis para avaliação e melhoria de desempenho no setor bancário: Estudo de Caso, Dissertação de Mestrado em Gestão Empresarial, Universidade do Algarve, Faculdade de Economia.

Entani, Tomoe; Yutaka Maeda; Hideo Tanaka (2002) Dual models of interval DEA and its extension to interval data, European Journal of Operational research, 136, p. 32-45.

Farrell, M. (1957) The measurement of productive efficiency, Journal of the Royal Statistical Society, 120, p. 253-281.

Ferreira, Domingos (2002a) Fusões, Aquisições e Reestruturações de Empresas, Volume I – Criação de valor, sinergias e insucessos, Lisboa, Edições Sílabo.

Ferreira, Domingos (2002b) Fusões, Aquisições e Reestruturações de Empresas, Volume II – Avaliação financeira, Lisboa, Edições Sílabo.

Golany, Boaz; Y. Roll (1989) An application procedure for DEA, Omega International Journal of Management Science, 17: 3, p.237-250.

Gugler, Klaus; Dennis Mueller; B. Yurtoglu; Christiane Zulehner (2003) The effects of mergers: an international comparison, International Journal of Industrial Organization, 21, p. 625-653.

Hwang, S-N; H-S Lee; J. Zhu (2016) Handbook of Operations Analytics Using Data Envelopment Analysis, Springer.

Kao, Chiang; Shiuh-Nan Hwang (2008) Efficiency decomposition in two-stage Data Envelopment Analysis: an application to non-life insurance companies in Taiwan, European Journal of Operational Research, 185: 1, p. 418-429.

Liu, Hsiang-His; Tser-Yieth Chen; Yung-Ho Chiu; Fu-Hsiang Kuo (2013) A Comparison of Three-Stage DEA and Artificial Neural Network on the Operational Efficiency of Semi-Conductor Firms in Taiwan, Modern Economy, 4, p. 20-31.

MacDowell, Fernando (2007) Uma aplicação do método de Data Envelopment Analysis - DEA para medir a eficiência operacional dos terminais de contêineres, Revista Electrónica de Gestão de Negócios, Universidade Católica de Santos (Brasil), 3: 3, p. 105-128.

Martins, Ana (2009) Measuring the Efficiency of Banks using a Two-stage DEA Model, Encontros Científicos – Tourism & Management Studies, n.º 5, Universidade do Algarve, Escola Superior de Gestão, Hotelaria e Turismo, p. 114-129.

Martins, Ana (2010) Banks in Portugal: service producers ou financial intermediaries?, Encontros Científicos – Tourism & Management Studies, n.º 6, Universidade do Algarve, Escola Superior de Gestão, Hotelaria e Turismo, p. 131-145.

Martins, Ana (2013) Avaliação da Eficiência e Identificação dos Fatores Determinantes da Eficiência do Setor Bancário em Portugal, Tese de Doutoramento

em Ciências Económicas e Empresariais – Especialidade em Gestão, Universidade do Algarve, Faculdade de Economia.

Martins, Vítor (2013) Avaliação da eficiência e eficácia de Centros de Emprego: o Caso Português, Dissertação de Mestrado em Gestão Empresarial, Universidade do Algarve, Faculdade de Economia.

Mello, João; Lidia Meza; Eliane Gomes; Luiz Neto (2005) Curso de Análise de Envoltória de Dados, XXXVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional - Pesquisa Operacional e o Desenvolvimento Sustentável, setembro 2005.

Mendes, Victor (1994) Eficiência Produtiva no Setor Bancário: uma aplicação do método DEA aos anos 1990-92, Investigação – Trabalhos em Curso, Economia, n.º 42, Faculdade de Economia, Universidade do Porto.

Meza, Lidia; Biondi Neto; Soares de Mello; E. Gomes (2005) ISYDS - Integrated System for Decision Support (SIAD - Sistema Integrado de Apoio à Decisão): a software package for data envelopment analysis model. Pesquisa Operacional, 25, (3), p. 493-503.

Meza, Lidia; Biondi Neto; Soares de Mello; E. Gomes; P. Coelho (2005) Free software for decision analysis: a software package for data envelopment models. In: 7th International Conference on Enterprise Information Systems - ICEIS 2005, 2, p. 207-212.

Meza, Lidia; João Mello; Eliane Gomes; Artur Fernandes (2007) Seleção de variáveis em DEA aplicada a uma análise do mercado de energia elétrica, Investigação Operacional, 27, p. 21-36.

Resti, Andrea (1997) Evaluating the cost-efficiency of the Italian banking system: what can be learned from the joint application of parametric and non-parametric techniques, Journal of Banking & Finance, 21, p. 221-250.

Ribeiro, Maria (2006) Economia de escala e de gama e os efeitos da concentração na eficiência bancária, Tese de Doutoramento, Biblioteca da Universidade do Minho, ref. 1822/6098.

Ruivo, D. (2011) Eficiência vs Eficácia (on line), Motivo.me, 23 de Maio de 2011. Disponível em URL: <http://www.motivo.me. Consultado em 15 de Outubro de 2012.

Salvador, Ana (2012) Previsão de Falência na Restauração, Dissertação de Mestrado em Contabilidade, Universidade do Algarve, Faculdade de Economia.

Seiford, Lawrence; Joe Zhu (1999a) Infeasibility of super-efficiency Data Envelopment Analysis models, Infor, 37: 2, p. 174-187.

Seiford, Lawrence e J. Zhu (1999b) Profitability and marketability of the top 55 US commercial banks, Management Science, 45: 9, p. 1270-1288.

Stanlake, George (1993) Introdução à Economia, 5ª edição, Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian.

Thrall, Robert (1996) Duality, classification and slacks in DEA, Annals of Operations Research, 66, p. 109-138.

Tone, Kaoru; Miki Tsutsui (2009) Network DEA: A slacks-based measure approach, European Journal of Operational Research, 197, p. 243–52.

Vaz, Maurício (2000) Aplicação DEA à Análise da Eficiência de Estações de Correios, Casos de Aplicação da Investigação Operacional, Caso 19, McGraw-Hill, Portugal.

Zhu, Joe (2009) Quantitative Models for Performance Evaluation and Benchmarking – Data Envelopment Analysis with Spreadsheets, 2nd Edition, Springer.

Zhu, Joe (2014) Quantitative Models for Performance Evaluation and Benchmarking – Data Envelopment Analysis with Spreadsheets, 3rd Edition, Springer.